Devoir surveillé 1

Mercredi 25 septembre 2024

Durée : 2h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : *les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.* Le sujet comporte 1 page(s).

Exercice 1. Ecrire un programme Python qui demande trois réels a, b, c avec $a \neq 0$ puis calcule et affiche l'ensemble des solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x + 2 \leqslant \sqrt{|x+1|}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (i+j)^2$.

Exercice 4.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{cases}$.

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant n$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - n$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \dfrac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \dfrac{n}{2^n}$.
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$$

   (a) Calculer S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (1 + u_k)^2 = 1 + \dfrac{1}{k^2} + \dfrac{1}{(k+1)^2}$.
   (c) En déduire que $T_n = \dfrac{n(n+2)}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$w_n = \frac{u_n}{2n+1} \qquad x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

   (a) Déterminer des réels a, b, c tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.
   (b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{2n+1} = \dfrac{1}{4}\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k - \frac{1}{n+1} - 3\Big)$.

3. On pose $y_1 = 1$ et $y_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 {u_k}^2}$ pour tout $n \geqslant 2$.
   (a) Exprimer y_n en fonction de w_n pour tout $n \geqslant 1$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y_k} = 18 + 24x_{2n+1} + \frac{6}{n+1}$.