Devoir maison 1

Pour le vendredi 18 octobre 2024

Exercice 1. Soient deux réels a, b vérifiant $0 < a < b$ et deux suites réelles définies par

$$u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$$

1. Montrer que, pour tout n entier naturel, u_n et v_n existent et sont strictement positifs.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{b-a}{2^n}$.
4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite et la déterminer.

Exercice 2. On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par le premier terme $u_0 \in [0, 4]$ et par les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{u_n}}}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{u_n}}}{2}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n existe et vérifie $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.
2. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et que $0 \leqslant v_n \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n^2 + v_n^2 = 1$.
4. (a) Etudier le sens de variation de la fonction $f : t \longmapsto \frac{\sqrt{2+\sqrt{t}}}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone (on pourra distinguer les cas $u_0 \leqslant u_1$ et $u_0 > u_1$).
5. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
6. En déduire la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note α la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et β celle de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
7. Exprimer β en fonction de α et montrer que $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$.