Devoir maison 2

Pour le lundi 4 novembre 2024

1. **Etude d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**
   On considère les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par
   $$p_0 = q_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}.$$
   (a) Montrer que les termes p_n et q_n sont des entiers strictement positifs pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ q_n \leqslant p_n$.

   On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

   (c) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.
   (e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n$.
   (f) La suite (u_n) converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?
2. **Etude des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$.
   (b) En déduire une expression de p_n et de q_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Retrouver le résultat de la question 1f.
3. **Etude d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (algorithme de Babylone).**
   On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
   $$v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{2}{v_n}\right)$$
   (a) Montrer que v_n existe, $v_n \in \mathbb{Q}$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$ pour tout entier naturel n.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|v_n - \sqrt{2}|^2$.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n - 1}$.
   (d) Conclure sur la limite de (v_n).
4. **Comparaison des vitesses de convergence.**
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq \sqrt{2}$ et $v_n \neq \sqrt{2}$.

   On définit alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{v_n - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}$.

   (b) Déterminer la limite de $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.