Devoir surveillé 2 (interrogation écrite)

Vendredi 11 octobre 2024

Durée : 1h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : ***les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*** **Le sujet comporte 1 page(s).**

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) u_n + n^2$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

On pose par ailleurs $v_n = (n-1)u_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 1$.
2. En déduire u_n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 2. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$.

1. L'application f est-elle surjective ?
2. L'application f est-elle injective ?

Exercice 3. Soient E un ensemble et $f \in E^E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & \lambda z & = & 0 \end{array} \right.$ suivant les valeurs de λ.

Devoir surveillé 2 (interrogation écrite)

Vendredi 11 octobre 2024

Durée : 1h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : ***les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*** **Le sujet comporte 1 page(s).**

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) u_n + n^2$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

On pose par ailleurs $v_n = (n-1)u_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 1$.
2. En déduire u_n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 2. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$.

1. L'application f est-elle surjective ?
2. L'application f est-elle injective ?

Exercice 3. Soient E un ensemble et $f \in E^E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & \lambda z & = & 0 \end{array} \right.$ suivant les valeurs de λ.