Calcul matriciel

Petits calculs

Exercice 1. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Simplifier :

1. $S = (2A)(3B) - (A + 2B)^2 + (A - B)(A + B)$
2. $T = (A + B)(2A^2 - 2B) - 2A^2(A + B) + (-A + B)^2$

Exercice 2. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer lorsque c'est possible les produits AB, BA, AC, CA, BC, CB.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B carrées d'ordre 3 telles que $AB = 0$.

Puissance d'une matrice

Exercice 4. Soient $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, où a est un réel, et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer U^2, U^3 puis U^n pour tout entier naturel n.
2. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On se propose de calculer A^n ($n \in \mathbb{N}$) par plusieurs méthodes.

1. *1ère méthode.*
   On pose $B = A - 2I_3$.
   (a) Calculer B^n en fonction de B, pour tout entier naturel n .
   (b) En déduire A^n pour tout entier naturel n.
2. *2ème méthode.*
   (a) Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$.
   (b) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $A^n = a_n A + b_n I_3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner les relations de récurrence vérifiées par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis déterminer a_n et b_n en fonction de n. Déduire A^n.
3. *3ème méthode.*
   On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et donner son inverse.
   (b) Calculer $D = P^{-1}AP$, puis D^n, puis A^n.

Exercice 7. On considère les matrices A et P suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

On se propose de calculer A^n pour tout entier naturel n, en s'aidant de la matrice P.

1. Prouver que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1}. On précisera la valeur de $18P^{-1}$.
2. On pose $B = P^{-1}AP$. Calculer B.
3. Montrer que B peut se mettre sous la forme $D + J$, où la matrice D est une matrice diagonale et la matrice J vérifie $J^2 = 0$.
4. En déduire l'expression de B^n en fonction de n, D^n, D^{n-1} et J.

5. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $A^n = PB^nP^{-1}$.
6. En déduire une expression de la matrice A^n sous la forme $A^n = \dfrac{1}{18}C_n$ où l'on précisera en fonction de n les coefficients de C_n.

Inversibilité d'une matrice

Exercice 8. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer l'inverse.

Exercice 9. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I$.
2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer des réels λ et μ tels que $A^2 = \lambda I_4 + \mu A$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 11. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}.

Exercice 12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
On suppose que $A + B$ est inversible, que $ABA = A^2B$ et que $BAB = B^2A$. Montrer que $AB = BA$.

Etude de suites numériques et probabilités

Exercice 13. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 6v_n \end{cases}$.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice A telle que, pour tout entier naturel n, on a :
$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 6v_n \end{cases} \iff X_{n+1} = AX_n$$
2. Justifier que P est inversible.
On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D.
3. En déduire A^n puis les termes u_n et v_n pour tout entier naturel n.

Exercice 14. Une araignée se déplace sur sa toile entre trois points A, B et C formant un triangle équilatéral :

— lorsqu'elle est en A, elle va en B avec la probabilité $\frac{4}{5}$ et en C avec la probabilité $\frac{1}{5}$.
— lorsqu'elle est en B, elle va en A avec la probabilité $\frac{4}{5}$ et en C avec la probabilité $\frac{1}{5}$.
— lorsqu'elle est en C, elle va en A avec la probabilité $\frac{1}{5}$ et en B avec la probabilité $\frac{4}{5}$.

Au départ, elle se trouve en A. Pour tout entier naturel n, on définit :

— A_n : « Au bout de n déplacements, elle se trouve en A » et $a_n = P(A_n)$
— B_n : « Au bout de n déplacements, elle se trouve en B » et $b_n = P(B_n)$
— C_n : « Au bout de n déplacements, elle se trouve en C » et $c_n = P(C_n)$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice M telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n$.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
3. Calculer $N = P^{-1}MP$. En déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n puis préciser leur limite. Vérifier que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n + c_n = 1$.