Dénombrement et probabilités sur un univers fini

CALCULS AVEC DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

Exercice 1. Calculer $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$ pour tout entier naturel n .

Exercice 2. Calculer $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \quad \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \quad \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k}$ et $T = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}$.

Calculer $S + T$, $S - T$ puis en déduire S et T .

Exercice 5. Calculer $\sum_{i=1}^n \left(\left(-\frac{2}{3} \right)^i \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} 3^k \right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6.

1. Montrer que, pour tout $(n, k, i) \in \mathbb{N}^3$ tel que $k \leq i \leq n$, on a $\binom{n}{i} \binom{i}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-i}$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (deux méthodes).

DÉNOMBREMENT ÉLÉMENTAIRE

Exercice 7. On tire simultanément 8 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y-a-t-il de tirages contenant 4 as ?
3. Combien y-a-t-il de tirages contenant 4 as et 4 coeurs ?

Exercice 8. De combien de façons peut-on former un nombre pair à 10 chiffres ne contenant aucun 0 ?

Exercice 9. De combien de façons peut-on écrire un mot (ayant ou non un sens) de 5 lettres toutes différentes ?

Exercice 10. Combien peut-on former de suites strictement croissantes de k nombres de l'intervalle d'entiers $\llbracket 1, n \rrbracket$?

DÉMONSTRATIONS COMBINATOIRES DE FORMULES

Exercice 11. Soient n et p deux entiers vérifiant $1 \leq p \leq n$.

Un club dispose de n licenciés. Le coach doit constituer une équipe de p joueurs et en désigner le capitaine. Dénombrer de deux façons les possibilités qu'il a de faire cela et en déduire une formule.

Exercice 12. Soit $(n, k, i) \in \mathbb{N}^3$ tel que $k \leq i \leq n$.

Un club dispose de n licenciés. Le coach doit constituer une équipe de i joueurs, dont k titulaires. Dénombrer de deux façons les possibilités qu'il a de faire cela et en déduire une formule.

PROBABILITÉS : GÉNÉRALITÉS

Exercice 13. Soient A, B, C trois événements. Exprimer en fonction de A, B, C et des opérations ensemblistes les événements suivants :

1. A seul se produit, 2. A et C se produisent, mais non B, 3. les trois événements se produisent, 4. l'un au moins des événements se produit, 5. deux événements au moins se produisent,	6. un événement au plus se produit, 7. aucun des trois événements ne se produit, 8. deux événements exactement se produisent, 9. pas plus de deux événements ne se produisent.

Exercice 14. Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes indiscernables au toucher. On tire simultanément au hasard trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- A : «les boules sont toutes de couleurs différentes»,
- B : «les boules sont toutes de la même couleur»,
- C : «exactement une boule est verte».

Exercice 15. 6 personnes prennent place au hasard dans 3 voitures pouvant accueillir de 0 à 6 passagers. Quelle est la probabilité que dans chaque voiture montent exactement 2 personnes ?

Exercice 16. Un groupe de n personnes ($n \in \mathbb{N}^*$) se présente au vestiaire d'une discothèque : chacune y dépose son blouson. Au moment de repartir, chacune de ces personnes reprend un blouson au hasard parmi les n blousons. Quelle est la probabilité que chaque personne reparte avec son blouson ?

Exercice 17. Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire les 3 boules successivement sans remise.

On note

- E_i l'événement «la boule numéro i est obtenue au tirage numéro i » pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,
- E l'événement «au cours du tirage, il n'y a aucune coïncidence entre le numéro de la boule tirée et le numéro du tirage».

1. Exprimer $\overline{E}$ à l'aide de E_1, E_2 et E_3 .
2. Calculer la probabilité de E .

Exercice 18. Lors d'un sommet diplomatique, le chef du service de sécurité recense 3 postes desquels il souhaite assurer la surveillance. Il dispose de 5 agents qu'il envoie au hasard sur les 3 postes. On note

- V_i l'événement «le poste numéro i est vide» pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,
- A l'événement «chacun des postes contient au moins un agent».

1. Exprimer $\overline{A}$ à l'aide de V_1, V_2 et V_3 .
2. Calculer la probabilité de A .

AVEC DU CONDITIONNEMENT EN PLUS

Exercice 19. Soient A et B deux événements tels que $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calculer $P_{\overline{B}}(\overline{A})$.

Exercice 20. Lors d'un prochain match, l'équipe F aura à affronter une des équipes A,B,C,D par tirage au sort. Il n'y a pas de match nul. La probabilité que F gagne si elle affronte A est 0,6. Elle est la même si F affronte B. Si F joue contre C, sa probabilité de gagner est 0,7 mais si F affronte D, la probabilité qu'elle perde le match est 0,8. Calculer la probabilité que F gagne le match.

Exercice 21. La proportion de pièces défectueuses dans un lot de pièces est 0,05. Le contrôle de fabrication des pièces est tel que

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96,
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Exercice 22. Soient N et n deux entiers naturels tels que $n \leq N$.

On dispose de $N + 1$ urnes numérotées de 0 à N . L'urne numéro j contient j boules blanches et $N - j$ boules noires.

On choisit une urne au hasard et on tire simultanément n boules dans cette urne.

Pour tout $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on note U_j l'événement «on choisit l'urne j ». On note également B l'événement «les n boules tirées sont blanches».

$$1. \text{ Montrer que } P(B) = \frac{\sum_{j=n}^N \binom{j}{n}}{(N+1) \binom{N}{n}}.$$

$$2. \text{ A l'aide de la formule de Pascal, montrer que } \sum_{j=n}^N \binom{j}{n} = \binom{N+1}{n+1}$$

3. En déduire $P(B)$.

Exercice 23. Une araignée se déplace sur sa toile entre trois points A,B,C formant un triangle équilatéral. Au départ, elle se trouve sur l'un des sommets. Lorsqu'elle est sur l'un quelconque des sommets, elle va sur l'un des deux autres sommets avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'événement «au bout de n déplacements, l'araignée se retrouve à son point de départ» et on pose $p_n = P(E_n)$.

1. Que vaut p_0 ? p_1 ?

2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 24. Sur un étang, il y a trois nénuphars N_a, N_b, N_c . Un crapaud se promène de nénuphar en nénuphar. Au départ, il est sur N_a . Ensuite, il se déplace selon les règles suivantes :

— s'il est sur N_a à l'instant n , il va indifféremment sur un des trois nénuphars à l'instant $n + 1$,

— s'il est sur N_b à l'instant n , il reste sur N_b à l'instant $n + 1$,

— s'il est sur N_c à l'instant n , il reste sur N_c avec la probabilité $\frac{1}{3}$, il va sur N_a avec la probabilité $\frac{1}{12}$ et sur N_b avec la probabilité $\frac{7}{12}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement «le crapaud est sur N_a (respectivement N_b, N_c) à l'instant n », et on note p_n, q_n, r_n les probabilités respectives de A_n, B_n, C_n .

1. Exprimer $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$ en fonction de p_n, q_n, r_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Exprimer r_{n+2} en fonction de r_{n+1} et r_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire p_n, q_n, r_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ puis calculer leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 25. Une puce se déplace par sauts successifs sur les sommets et le centre de gravité O d'un triangle équilatéral. Au temps $t = 0$, elle est en O. Par la suite, elle saute du point où elle se trouve au temps $t = k$ pour se retrouver sur l'un des autres points de façon équiprobable au temps $t = k + 1$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note O_k l'événement «la puce est sur O au temps $t = k$ » et, pour tout $n \geq 2$, on note R_n l'événement «la puce revient en O pour la première fois au temps $t = n$ ».

1. Pour tout $n \geq 2$, exprimer R_n à l'aide des événements O_k .

2. Calculer la probabilité de R_n pour tout $n \geq 2$.

Exercice 26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère deux urnes A et B contenant chacune au départ une boule blanche et une boule noire. On réalise n fois l'expérience suivante :

— on tire une boule d'une des urnes,

— si elle est blanche, on la remet dans cette même urne et le tirage suivant se fait dans cette urne,

— si elle est noire, on la met dans l'autre urne et le tirage suivant se fait dans cette autre urne.

Le premier tirage se fait dans l'urne A.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement «le k -ième tirage se fait dans l'urne A» et B_k l'événement «le k -ième tirage donne une boule blanche».

1. Quelle probabilité a-t-on de tirer n fois dans la même urne ?

2. (a) Exprimer $P(A_n)$ en fonction de $P(A_{n-1})$, si $n \geq 2$.

- (b) En déduire la probabilité de tirer au n -ième coup dans l'urne A.
3. Quelle probabilité a-t-on de tirer au n -ième coup une boule blanche ?

Exercice 27. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité p et "Face" avec la probabilité q . On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- soit si l'on a obtenu "Pile",
- soit si l'on a obtenu n fois "Face".

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note P_k (respectivement F_k) l'événement « on obtient "Pile" (respectivement "Face") au k -ième lancer ».

1. Déterminer la probabilité de l'événement X_0 « on n'obtient pas de "Pile" ».
2. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer la probabilité de l'événement T_k : « on a effectué exactement k lancers ».
3. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, déterminer la probabilité de l'événement Y_k : « on a obtenu exactement k fois "Face" ».

AVEC DE L'INDÉPENDANCE EN PLUS

Exercice 28. On dispose de deux dés équilibrés D_1 et D_2 :

- les faces de D_1 sont numérotées de 1 à 6,
- D_2 possède cinq faces portant le 1 et une face portant le 6.

On choisit un dé au hasard et on le lance deux fois.

1. Les événements E «le premier lancer donne 1» et F «le deuxième lancer donne 1» sont-ils indépendants ?
2. Quelle est la morale de cet exercice ?

Exercice 29. On dispose de cinq pièces de monnaie dont une possède deux «face». On choisit une des cinq pièces au hasard et on la lance n fois.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir «face» au premier lancer ?
2. On a obtenu «face» au premier lancer. Quelle est la probabilité d'avoir choisi la pièce truquée ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir «face» aux n lancers ?
4. On a obtenu n «face» aux n lancers. Quelle est la probabilité p_n d'avoir choisi la pièce truquée ? Déterminer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 30. Une urne contient b boules blanches et b boules noires ($b \geq 1$). On effectue n tirages successifs d'une boule.

1. *Premier protocole* : les tirages se font avec remise.
Quelle est la probabilité que toutes les boules tirées soient blanches ?
2. *Second protocole* : les tirages se font sans remise.
Quelle est la probabilité que toutes les boules tirées soient blanches ?
3. *Troisième protocole* :
— si on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne,
— si on tire une boule noire, on la remet dans l'urne et on rajoute b boules blanches.
Quelle est la probabilité que toutes les boules tirées soient blanches ? que toutes les boules tirées soient noires ?