

Devoir maison 3

Soient $m \in \mathbb{R}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans tout l'exercice, I désigne la matrice identité de taille 3×3 .

1. Résultats préliminaires.

- (a) Montrer que $A^2 = A + 2I$.
- (b) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .

2. Calcul de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose $P = \frac{1}{3}(A + I)$ et $Q = \frac{1}{3}(2I - A)$.

- (a) Calculer P^k et Q^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- (b) Exprimer A en fonction de P et Q .
- (c) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Une équation matricielle.

On cherche à résoudre l'équation

$$XA + AX = I \quad (E)$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer que si X est solution de (E) alors X et A^2 commutent.
- (b) En déduire que si X est solution de (E) alors X et A commutent.
- (c) Déterminer l'ensemble des solutions X de (E) .