Devoir maison 4

Pour le lundi 25 novembre 2024

Exercice 1. Une grenouille mange au plus une mouche par jour, et ce de la façon suivante :

— si elle a mangé une mouche la veille, elle ne chasse pas et ne mange donc rien de toute la journée,

— si en revanche elle n'a rien mangé la veille, elle se met en chasse et a une probabilité égale à $p \in]0,1[$ de réussir à capturer une mouche au cours de la journée et de la manger.

Le premier jour, la grenouille chasse et a donc une probabilité égale à $p \in]0,1[$ de réussir à capturer une mouche au cours de la journée et de la manger.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note A_i l'événement «la grenouille mange le i-ème jour».

1. Soit $n \geqslant 2$. Quelle est la probabilité pour que la grenouille ne mange rien au cours des n premiers jours ?
2. Soit $n \geqslant 2$. Quelle est la probabilité pour que la grenouille mange pour la première fois le n-ième jour ?
3. Soit a_i la probabilité de l'évènement A_i.
   (a) Exprimer a_n en fonction de a_{n-1}, pour tout $n \geqslant 2$.
   (b) En déduire la valeur de a_n en fonction de n, pour tout $n \geqslant 1$.
   (c) Quelle est la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 2.

Un appartement est composé de deux pièces A et B reliées entre elles par une porte ouverte. Seule la pièce B possède une issue pour aller dehors à l'air libre. Une guêpe se trouvant dans l'appartement voudrait aller dehors à l'air libre. Elle se déplace selon les règles suivantes :

— si elle est dans la pièce A à l'instant n, alors, à l'instant $n+1$, elle reste dans la pièce A avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ ou passe dans la pièce B avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$;

— si elle est dans la pièce B à l'instant n, alors, à l'instant $n+1$, elle passe dans la pièce A avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$, ou elle reste dans la pièce B avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, ou elle va dehors à l'air libre avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$;

— si elle est dehors à l'air libre alors elle ne revient plus dans l'appartement.

A l'instant 0, la guêpe est dans la pièce A.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement «la guêpe est dans la pièce A à l'instant n», B_n l'événement «la guêpe est dans la pièce B à l'instant n» et D_n l'événement «la guêpe est dehors à l'air libre à l'instant n». On note également a_n, b_n et d_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n et D_n.

1. Déterminer a_0, b_0, d_0, a_1, b_1 et d_1.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et d_{n+1} en fonction de a_n, b_n et d_n.
3. Montrer, qu'à partir du rang 1, la suite (a_n) est géométrique.
4. En déduire a_n, b_n et d_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Pour tout $n \geqslant 2$, déterminer la probabilité de l'événement S_n : «l'instant n est le premier instant au cours duquel la guêpe est dehors à l'air libre».