

Devoir surveillé 3

Mercredi 13 novembre 2024

Durée : 3h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être encadrés. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : *les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées*. Le sujet comporte 2 page(s).

Exercice 1.

1. Question préliminaire.

On considère une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et convergente vers ℓ , et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

- (a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_n \leq a_n$.
- (b) Étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- (c) Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$.
- (d) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité suivante : $b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$
- (e) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

- 2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , u_n est bien défini et supérieur ou égal à 1.
- (b) Étudier les variations de la suite (u_n) .
- (c) Établir que la suite (u_n) diverge et donner sa limite.
- (d) Recopier et compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n > 1000$.

```
import numpy as np
n=1
u=1
S=1
while S<=1000:
    u=.....
    S=.....
    n=n+1
print(.....)
```

- 3. (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$.
- (b) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- (c) Utiliser la première question pour établir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \frac{1}{2}$.
- 4. (a) Exprimer S_n en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- (b) En déduire la limite de $\frac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- (c) Recopier et compléter le script **Python** suivant afin qu'il fasse le même travail que celui de la question 2d sans calculer S_n :

```
import numpy as np
n=0
u=1
while u<=.....
    u=.....
    n=n+1
print(.....)
```

Exercice 2.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note I_n la matrice identité d'ordre n .

1. Étude du cas $n = 3$.

Dans cette question, on considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer $M^2 - M$.
- Montrer que M est inversible et donner son inverse.
- Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
- On pose $D = P^{-1}MP$. Montrer que $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- Montrer que, pour tout entier naturel k , on a $M^k = PD^kP^{-1}$.
- Soit k un entier naturel. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer qu'il existe deux réels a_k et b_k (que l'on déterminera) tels que $M^k = a_kM + b_kI_3$.

2. Cas général : n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.

On considère la matrice J_n carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a $(J_n)^k = n^{k-1}J_n$.
- Exprimer M_n en fonction de I_n et J_n , puis en déduire que, pour tout entier naturel k non nul, on a $(M_n)^k = c_kJ_n + (-1)^k I_n$ où c_k est un réel que l'on déterminera.
- En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_n)^k$, en fonction de n et de k .