

Devoir surveillé 4 (interrogation écrite)

Vendredi 29 novembre 2024

Durée : 1h

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère deux urnes A et B contenant chacune au départ une boule blanche et une boule noire. On réalise n fois l'expérience suivante :

- on tire une boule d'une des urnes,
- si elle est blanche, on la remet dans cette même urne et le tirage suivant se fait dans cette urne,
- si elle est noire, on la met dans l'autre urne et le tirage suivant se fait dans cette autre urne.

Le premier tirage se fait dans l'urne A.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement «le k -ième tirage se fait dans l'urne A» et B_k l'événement «le k -ième tirage donne une boule blanche».

1. Quelle probabilité a-t-on de tirer n fois dans la même urne ?
2. (a) Exprimer $P(A_n)$ en fonction de $P(A_{n-1})$, si $n \geq 2$.
(b) En déduire la probabilité de tirer au n -ième coup dans l'urne A.
3. Quelle probabilité a-t-on de tirer au n -ième coup une boule blanche ?

Exercice 2. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie pour tout réel x par :

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x)$$

1. Quel est le degré de P_n ? son coefficient dominant ?
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.
En déduire la parité de P_n .
3. Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

Devoir surveillé 4 (interrogation écrite)

Vendredi 29 novembre 2024

Durée : 1h

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère deux urnes A et B contenant chacune au départ une boule blanche et une boule noire. On réalise n fois l'expérience suivante :

- on tire une boule d'une des urnes,
- si elle est blanche, on la remet dans cette même urne et le tirage suivant se fait dans cette urne,
- si elle est noire, on la met dans l'autre urne et le tirage suivant se fait dans cette autre urne.

Le premier tirage se fait dans l'urne A.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement «le k -ième tirage se fait dans l'urne A» et B_k l'événement «le k -ième tirage donne une boule blanche».

1. Quelle probabilité a-t-on de tirer n fois dans la même urne ?
2. (a) Exprimer $P(A_n)$ en fonction de $P(A_{n-1})$, si $n \geq 2$.
(b) En déduire la probabilité de tirer au n -ième coup dans l'urne A.
3. Quelle probabilité a-t-on de tirer au n -ième coup une boule blanche ?

Exercice 2. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie pour tout réel x par :

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x)$$

1. Quel est le degré de P_n ? son coefficient dominant ?
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.
En déduire la parité de P_n .
3. Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.