

Devoir maison 5

Pour le lundi 16 décembre 2024

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = x - n \ln(x)$.

1.
 - (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
 - (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

2. *Etude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.*
 - (a) Montrer que $\forall n \geq 3$, $1 < u_n < e$.
 - (b) Montrer que $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
 - (c) En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge et déterminer sa limite.

3. *Etude de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$.*
 - (a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
 - (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > 2 \ln(n)$.
 - (c) Etablir : $\forall n \geq 3$, $n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$.
 - (d) Déterminer la limite de $\frac{\ln(v_n)}{\ln n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.