

Devoir maison 6

Pour le lundi 6 janvier 2025

Partie I : Etude d'une fonction.

Soit la fonction f définie sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in] -\frac{1}{2}, 0[\cup]0, +\infty[, & f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x} - 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
On admet que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -2$.
- (b) Etudier les variations de f .
- (c) Montrer que f s'annule en un unique point α .
Montrer que $\alpha \in]1, 2[$.

Partie II : Etude d'une suite convergeant vers α .

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $u_0 > 0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n) = g(u_n)$.

1. Vérifier que u_n est bien défini pour tout n dans $\mathbb{N}$.
2. On suppose dans cette question que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Que vaut alors sa limite L ?
3. (a) On suppose que u_0 est dans l'intervalle $]0, \alpha]$.
Montrer que, alors, pour tout n , u_n est dans l'intervalle $]0, \alpha]$.
Puis montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et convergente vers α .
- (b) Montrer, de manière analogue, que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers α si on suppose u_0 dans $]\alpha, +\infty[$.
4. On pose $u_0 = 1$.
 - (a) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $u_n \in [1, \alpha]$.
 - (b) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$.
 - (c) En déduire que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
 - (d) Au vu de cette majoration, à partir de quel rang n est-on sûr que u_n est une valeur approchée de α à 10^{-4} près ?