

Devoir surveillé 5

Mercredi 18 décembre 2024

Durée : 3h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être encadrés. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : *les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées*. Le sujet comporte 2 page(s).

Exercice 1. La *trace* d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux. Ecrire une fonction Python nommée `tr` qui prend en entrée une matrice carrée `A` et renvoie sa trace.

Exercice 2. Soit u la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$.

On note $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n .

1. Déterminer une matrice M telle que $V_{n+1} = MV_n$ pour tout entier naturel n .
2. Démontrer que $V_n = M^n V_0$ pour tout entier naturel n .
3. Ecrire une fonction Python qui prend en entrée un entier naturel n puis renvoie V_{100} et u_{100} .

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré $n \geq 1$ tel que P' divise P .

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \frac{1}{n}(x - a)P'(x)$.
2. Montrer que a est racine de P de multiplicité n .
3. Que conclure sur P ?

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n sur $\mathbb{R}$ et que a_n appartient à $]0, 1]$.
2. (a) Déterminer la monotonie de la suite (a_n) .
(b) Montrer que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.
3. On considère la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2}$ pour tout $x \in [0, 1]$ et la suite $(x_k)_{k \geq 0}$ définie par $x_0 = 1$ et $x_{k+1} = g(x_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(a) Montrer que a_2 est l'unique point fixe de g sur $[0, 1]$.
(b) Montrer que g est croissante sur $[a_2, 1]$.
(c) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_2 \leq x_k \leq 1$.
(d) Déterminer la monotonie de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
(e) Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 5.

Une fourmi se déplace le long des côtés d'un carré $ABCD$ pour aller de sommets en sommets.

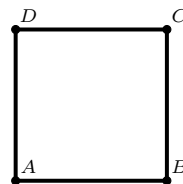
Lorsqu'elle est sur un des sommets du carré, elle va sur un des deux sommets adjacents : on appelle cela un déplacement. Ce déplacement se fait dans le sens inverse du sens trigonométrique avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et dans le sens trigonométrique avec une probabilité $q = 1 - p$.

Au départ, c'est-à-dire après 0 déplacement, la fourmi est sur l'un des quatre sommets.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement «la fourmi se trouve sur A à l'issue du n -ième déplacement», B_n l'événement «la fourmi se trouve sur B à l'issue du n -ième déplacement», C_n l'événement «la fourmi se trouve sur C à l'issue du n -ième déplacement», et D_n l'événement «la fourmi se trouve sur D à l'issue du n -ième déplacement».

L'événement A_0 (respectivement B_0, C_0, D_0) est «la fourmi est sur A (respectivement B, C, D) au départ».

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n la probabilité de A_n , b_n la probabilité de B_n , c_n la probabilité de C_n et d_n la probabilité de D_n .



Partie 1 : calcul matriciel.

On considère les matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer M^2 .
2. Déterminer des réels λ et μ tels que $A^2 = \lambda M + \mu I_4$.
3. On pose $J = \frac{1}{2}(I_4 + M)$ et $K = \frac{1}{2}(I_4 - M)$.
Déterminer J^2 , K^2 , JK et KJ .
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer J^n en fonction de J et exprimer K^n en fonction de K .
5. Montrer que $A^2 = J - (1 - 2p)^2 K$.
6. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^{2n} = u_n I_4 + (1 - u_n) M \quad \text{où} \quad u_n = \frac{1 + (-1)^n (1 - 2p)^{2n}}{2}$$

Partie 2 : emplacement de la fourmi à l'issue du n -ième déplacement.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} , b_{n+1} , c_{n+1} et d_{n+1} en fonction de a_n , b_n , c_n et d_n . En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = A X_n$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

3. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de a_{2n} , b_{2n} , c_{2n} et d_{2n} en fonction de a_0 , b_0 , c_0 , d_0 et u_n .

Partie 3 : les sommets C et D .

Dans cette partie seulement, on suppose que la fourmi est en A au départ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement E_n «la fourmi n'atteint jamais ni le sommet C ni le sommet D lors des n premiers déplacements».

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer E_n à l'aide de certains des événements A_i ($i \in \mathbb{N}$) et B_j ($j \in \mathbb{N}$). On pourra distinguer n pair et n impair.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(E_n)$. On pourra distinguer n pair et n impair.