

Fonctions numériques réelles

GÉNÉRALITÉS

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + e^x}{x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

Montrer que la courbe Γ admet en $-\infty$ une asymptote oblique.

Exercice 2. Montrer que la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante.
 $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Montrer que $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 4. Montrer qu'une fonction décroissante f de $[a, b]$ dans $[a, b]$ admet au plus un point fixe dans $[a, b]$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq x \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que f est impaire.
3. En déduire que $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 6. Soient f et g deux fonctions réelles bornées définies sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$.

Montrer que : $\sup_D |f+g| \leq \sup_D |f| + \sup_D |g|$. Y-a-t-il égalité ?

CALCULS DE LIMITES

Exercice 7. Calculer les limites suivantes :

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2(x+2) - 1)$ | 14. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x} \right)$ | 26. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x \left(x + \frac{3}{x} \right)$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x} \right)$ | 27. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 2x^2 - 4)$ | 16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ | 28. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1+e^x)$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 2x^2 - 4)$ | 17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}+2}$ | 29. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1+e^x)$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^3+1}{x^2-4x+5}$ | 18. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ | 30. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - e^{2x})$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^3+1}{x^2-4x+5}$ | 19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ | 31. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - e^{2x})$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4x}{3x-1}$ | 20. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-x}{x-2}$ | 32. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1+e^{-2x})$ |
| 8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)^3}{-2x^2+8}$ | 21. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(3 - \frac{2}{(x+1)^2} \right)$ | 33. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(1+e^{-2x})$ |
| 9. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3-x}{x-1}$ | 22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x^2-x+2)(3-x)}{(x-1)^2} + \right.$ | 34. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-2x+6)e^x$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + 2 \right) (x^2-1)$ | 23. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-2x}-x)$ | 35. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2-2x+6)e^x$ |
| 11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 2 \right) (x^2-1)$ | 24. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-2x}-x)$ | 36. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}$ |
| 12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3-2x)^3}{1-x}$ | 25. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ | 37. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(3-2x)^3}{1-x}$ | | 38. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x+1}{2x-3}}$ |
| | | 39. $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} e^{\frac{x+1}{2x-3}}$ |
| | | 40. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ |

41. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2)e^{\frac{1}{x-1}}$
42. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{e^{2x}+1} - e^x)$
43. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{2 + e^x}$
44. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{2 + e^x}$
45. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^x}{x+1}$
46. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+1}$
47. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{e^x + 1}$
48. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{e^x + 1}$
49. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^{-x} - 1}$
50. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{e^{-x} - 1}$
51. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{\frac{x}{2}}$
52. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{\frac{x}{2}}$
53. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3 + 2x - 1)$
54. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x^3 + 2x - 1)$
55. $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((x+1)e^x - 2)$
56. $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)e^x - 2)$
57. $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-\frac{1}{x}}$
58. $\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{-\frac{1}{x}}$
59. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x}$
60. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right)$
61. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right)$
62. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{-1 + \ln x}$
63. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{-1 + \ln x}$
64. $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\ln x)^2 - \ln x)$
65. $\lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 - \ln x)$
66. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2 + 3x - 4)$
67. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 3x - 4)$
68. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \right)$
69. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$
70. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$
71. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{e^x + 2}{e^x + 1} \right)$
72. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{e^x + 2}{e^x + 1} \right)$
73. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{x}$
74. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x}$
75. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x)$
76. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x)$
77. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x^2 + 1}$
78. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x^2 + 1}$
79. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x) \ln x$
80. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - \ln x)$
81. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-(\ln x)^2 - 2 \ln x + \frac{1}{x \ln x} \right)$

Exercice 8. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + p^2} - p}{\sqrt{x^2 + q^2} - q}$, avec $(p, q) \in (\mathbb{R}^*)^2$

Exercice 9. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{1 - \cos x}}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2 - \cos x}$
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{4x - \pi}$
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan^2 x - \tan x)$
5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\tan^2 x - \tan x)$
6. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{\tan x}{\tan x - 1}$
7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\tan x - 1}$
8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{1 + x^2}$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \sin \left(\frac{1}{x} \right)$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} xe^{\frac{1}{\sin x}}$
14. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(ax) - \sin(x^2)}{a - x}$, avec $a \in \mathbb{R}^*$
15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(ax) - \cos(a)}{e^{-ax^2} - e^{-a}}$, avec $a \in \mathbb{R}^*$

Exercice 10. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$ ($a > 0, b > 0$)
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lfloor 1/x \rfloor + x}{\lfloor 1/x \rfloor - x}$

Exercice 11. Les limites suivantes existent-elles ?

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sin x}{x^2 + 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{[x]^{[x]}}$$

ETUDE DE LA CONTINUITÉ

Exercice 12. Est-il possible de prolonger par continuité les fonctions suivantes en x_0 ?

$$1. x_0 = \frac{1}{2}, \quad f : x \mapsto \frac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$$

$$3. x_0 = 0, \quad f : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$2. x_0 = 1, \quad f : x \mapsto \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1)$$

$$4. x_0 = 0, \quad f : x \mapsto x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 13. Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1. f : x \mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$2. h : x \mapsto [x] + (x - [x])^2$$

Exercice 14. Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1. f : x \mapsto (x^2 - 1) \sin\left(\frac{1}{x - 1}\right)$$

$$2. g : x \mapsto \cos(\ln|x|) \ln(1 + x)$$

$$3. i : x \mapsto [x] \sin(\pi x)$$

FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante. Montrer que f a un unique point fixe.

Exercice 16. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = f(\alpha)$.

Exercice 17.

1. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est bornée.

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell' \in \mathbb{R}$. Montrer que f est bornée.

Exercice 18. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . Montrer que les fonctions

$$\sup(f, g) : x \mapsto \sup(f(x), g(x))$$

$$\inf(f, g) : x \mapsto \inf(f(x), g(x))$$

sont continues sur I .

EQUATIONS

Exercice 19. Montrer que l'équation $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Montrer que l'équation $\frac{1}{x+1} \cos x - x^2 + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

FONCTION RÉCIPROQUE

Exercice 21. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ à préciser. On déterminera ensuite la bijection réciproque.

Exercice 22. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x - 8$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Combien l'équation $2f(x) + 3f^{-1}(x) = 10$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$? La résoudre ensuite.

DIVERS

Exercice 23. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et vérifiant $f(2x) = f(x)$ pour tout réel x .

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$
2. En déduire que f est constante.

Exercice 24. Soit f une fonction définie sur un intervalle I , continue sur I et vérifiant : $\forall x \in I, f(x)^2 = f(x)$. Montrer que f est constante.

SUITES DÉFINIES IMPLICITEMENT

Exercice 25. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2 + 1)}{n}$$

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0, +\infty[$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $0 < \alpha_n < 1$.
3. Montrer que $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la monotonie de la suite (α_n) .
4. Montrer qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 26.

1. Pour tout entier $n \geq 3$, montrer que l'équation $e^x = x^n$ possède une unique solution dans $[0, n]$, que l'on note x_n .
(Indication : considérer $f_n : x \mapsto x^n e^{-x} - 1$.)
2. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$ pour tout $n \geq 3$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est convergente et déterminer sa limite.