

Devoir maison 7

Pour le lundi 20 janvier 2024

Soit N un entier naturel non nul. On dispose d'un sac contenant N jetons numérotés de 1 à N dans lequel on peut effectuer une succession de tirages **avec remise** d'un jeton en notant, à chaque fois, le numéro obtenu.

Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n le nombre (aléatoire) de numéros distincts obtenus au cours des n premiers tirages.

1. Soit n un entier naturel non nul.

- (a) Quelles sont les valeurs prises T_n ?
- (b) Calculer $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = n)$.
- (c) Déterminer $P(T_n = 2)$.

2. Soit (k, n) un couple d'entiers naturels non nuls avec $1 \leq k \leq N$. Montrer que

$$P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}P(T_n = k) + \frac{N - k + 1}{N}P(T_n = k - 1)$$

3. Pour tout entier naturel n non nul, on considère le polynôme

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = \sum_{k=1}^N P(T_n = k)x^k$$

(a) Prouver l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G'_n(x) + xG_n(x)$$

(b) Pour tout entier naturel n non nul, en reliant l'espérance $E(T_n)$ à G'_n , montrer que

$$E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)E(T_n) + 1$$

(c) En déduire $E(T_n)$ en fonction de N et n .

(d) Déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E(T_N)}{N}$.