Devoir maison 8

Dans ce problème, on étudie la fonction F définie par :

$$\forall x > 0,\ F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.
La courbe représentative de F sera notée Γ.

1. (a) Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Justifier la continuité et la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
2. A l'aide d'un changement de variable, montrer que : $\forall x > 0,\ F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. (a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0,\ \varphi(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x}$. Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.
   (b) Montrer que : $\forall x > 0,\ F(x) = \operatorname{Arctan}(x) \ln(x) - \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\ \mathrm{d}t$.
   (c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. La nouvelle fonction ainsi obtenue sera encore notée F. Que peut-on dire de F au voisinage de $+\infty$?
   (d) Montrer que F n'est pas dérivable à droite en 0. Que peut-on dire de Γ au point d'abscisse 0 ?
4. Dans cette question, on cherche à calculer une valeur approchée de $F(0)$.
   (a) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, calculer $I_k(x) = \displaystyle\int_1^x t^k \ln t\ \mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.
   (c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$, une majoration de $\left| F(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) \right|$.
   (d) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |F(0) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(2n+3)^2}$.
   (e) Donner, en détaillant la méthode utilisée, une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$.