Devoir surveillé 6 (interrogation écrite)

Jeudi 23 janvier 2025

Durée : 1h

Exercice 1. On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2+x} \end{array}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Montrer que u_n existe et $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. *On remarque que $f(-1+\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2}$ (Cadeau ! Vous n'avez pas à le calculer).*
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - (-1+\sqrt{2})\right| \leqslant \dfrac{1}{4}\left|u_n - (-1+\sqrt{2})\right|$
3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n - (-1+\sqrt{2})\right| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \left|u_0 - (-1+\sqrt{2})\right|$
4. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. On me propose d'acheter un billet de tombola dans un carnet contenant n billets numérotés de 1 à n, où $n \in \mathbb{N}^*$.
Afin de m'aider à choisir un numéro de billet, je lance n fois une pièce dont la probabilité d'avoir PILE est $p \in [0,1]$.
On note X le nombre de PILE obtenus.
Si je n'obtient aucun PILE, j'achète un billet au hasard dans le carnet. Sinon, j'achète le billet dont le numéro est égal au nombre de PILE que j'ai obtenu.
On note alors Y le numéro du billet que j'achète.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Déterminer l'espérance de Y.

Devoir surveillé 6 (interrogation écrite)

Jeudi 23 janvier 2025

Durée : 1h

Exercice 1. On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2+x} \end{array}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Montrer que u_n existe et $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. *On remarque que $f(-1+\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2}$ (Cadeau ! Vous n'avez pas à le calculer).*
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - (-1+\sqrt{2})\right| \leqslant \dfrac{1}{4}\left|u_n - (-1+\sqrt{2})\right|$
3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n - (-1+\sqrt{2})\right| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \left|u_0 - (-1+\sqrt{2})\right|$
4. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. On me propose d'acheter un billet de tombola dans un carnet contenant n billets numérotés de 1 à n, où $n \in \mathbb{N}^*$.
Afin de m'aider à choisir un numéro de billet, je lance n fois une pièce dont la probabilité d'avoir PILE est $p \in [0,1]$.
On note X le nombre de PILE obtenus.
Si je n'obtient aucun PILE, j'achète un billet au hasard dans le carnet. Sinon, j'achète le billet dont le numéro est égal au nombre de PILE que j'ai obtenu.
On note alors Y le numéro du billet que j'achète.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Déterminer l'espérance de Y.