

Devoir surveillé 7

Mercredi 29 janvier 2025

Durée : 3h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être encadrés. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : *les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées*. Le sujet comporte 2 page(s).

Exercice 1.

On considère $\alpha \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de α^X .
2. Déterminer α et p pour que α^X soit centrée réduite.

Exercice 2.

1. Première partie.

(a) Montrer que $\binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}$ pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\ell \leq k \leq n$.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p, q) \in [0, 1]^2$.

On considère une variable aléatoire réelle X suivant la loi binomiale de paramètres n et q , et une variable aléatoire réelle Y dont l'ensemble des valeurs est $\llbracket 0, n \rrbracket$ et vérifiant

$$\forall (k, \ell) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad P_{[X=k]}(Y = \ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell > k \\ \binom{k}{\ell} p^\ell (1-p)^{k-\ell} & \text{si } \ell \leq k \end{cases}$$

Montrer que Y suit la loi binomiale de paramètres n et pq .

2. Deuxième partie.

Soient $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

On lance n pièces de monnaie dont la probabilité d'avoir "pile" est $p \in [0, 1]$ et on note Z_1 la variable aléatoire égale au nombre de "pile" obtenus.

On ramasse alors les pièces qui ont donné "pile", puis on les lance et on note Z_2 le nombre de "pile" obtenus lors de ce second lancer.

On ramasse alors les pièces qui ont donné "pile" lors du second lancer, puis on les lance et on note Z_3 le nombre de "pile" obtenus lors de ce troisième lancer.

Et ainsi de suite... On réalise de cette manière m lancers de pièces au total et on définit donc m variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_m$.

(a) Déterminer la loi de Z_1 , son espérance et sa variance.

(b) Montrer que Z_m suit la loi binomiale de paramètres n et p^m .

Exercice 3. On considère la suite réelle $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^n(x)}$

1. Calculer I_0 et I_2 .

2. Déterminer les réels a et b tels que : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$.

3. En posant $t = \sin x$, déterminer I_1 .

4. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5. Montrer que : $\forall n \geq 2, I_n \geq \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n x} dx \geq \frac{1}{n^2} \frac{1}{\cos^n(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2})}$

6. En déduire le comportement de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

7. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n$. On pourra remarquer que $\frac{1}{\cos^{n+2}(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \times \frac{1}{\cos^n(x)}$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)\ln(x)}{2(x-1)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
3. On admet que $\ln(x) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\varepsilon(x)$ où ε est une fonction définie au voisinage de 1 et vérifiant $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x) = 0$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer $f'(1)$.
4. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\ln(x) \leq x - 1$.
(b) On définit la fonction g par : $\forall x > 0, g(x) = x^2 - 1 - 2x \ln(x)$.
Déterminer le signe de g .
(c) En déduire les variations de f .
5. Soit a un réel vérifiant $a > 1$. On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$$

- (a) Montrer que, pour tout n entier naturel, x_n existe et $x_n > 1$.
- (b) Montrer que : $\forall x > 1, f(x) < x$.
- (c) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite réelle ℓ que l'on précisera.
6. Ecrire une fonction Python qui prend en entrée le réel a et un entier n , puis renvoie le terme x_n .