Intégration sur un segment

Propriétés de l'intégrale

Exercice 1. Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, avec $a<b$.
Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$, $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer, par l'absurde, que f admet un point fixe dans $[0,1]$. (*Indication : penser à* $t \longmapsto f(t)-t$.)

Exercice 3. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a<b$.
A quelle condition nécessaire et suffisante sur f a-t-on $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$?

Exercice 4. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et $P \in \mathbb{R}[x]$. On suppose que $\displaystyle\int_a^b t^k P(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b P(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$.
2. Qu'en déduire du polynôme P ?

Exercice 5. Soient a et b deux réels avec $a<b$, f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

1. *Inégalité de Cauchy-Schwarz.*
   (a) Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \displaystyle\int_a^b (xf(t)+g(t))^2\,\mathrm{d}t$ est une fonction polynôme en x.
   (b) Déterminer le signe de $P(x)$ et montrer que
   $$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \qquad (\sharp)$$
   (c) Montrer que, si f et g sont continues sur $[a,b]$, alors on a égalité dans $(\sharp)$ si et seulement si f et g sont proportionnelles.
2. *Inégalité de Minkowski.*
   (a) Déduire de l'inégalité $(\sharp)$ de Cauchy-Schwarz que
   $$\left(\int_a^b (f+g)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2} \qquad (\sharp\sharp)$$
   (b) Montrer que, si f et g sont continues sur $[a,b]$, alors on a égalité dans $(\sharp\sharp)$ si et seulement si f et g sont proportionnelles avec un coefficient de proportionnalité dans $\mathbb{R}^+$.

Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 6. Donner une primitive des fonctions suivantes sur les intervalles demandés :

1. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = 2x^5 - x^3 + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x} + 3$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. $f(x) = 3x\sin(x^2)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 7. Donner une primitive des fonctions suivantes (on précisera le domaine de validité de ces primitives) :

1. $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^3}$
2. $f(x) = \dfrac{10x+3}{5x^2+3x+1}$
3. $f(x) = \sin x \cos^5 x$
4. $f(x) = 3x\mathrm{e}^{-x^2+1}$
5. $f(x) = \sin 5x$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+8x}}$
7. $f(x) = \dfrac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}$
8. $f(x) = 3^{\cos x}\sin x$
9. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$
10. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-3}+\frac{1}{t+3}\right)\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{7}^{5}\frac{t}{t-3}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{3}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$
4. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}\frac{\sin t}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_{0}^{2}(1-|t-1|^3)\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_{0}^{-\sqrt{2}}\left(|t+1|+\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_{-2}^{2}|t^2-1|\,\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int_{-1}^{-2}\frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{0}\frac{4x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}\tan x\,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int_{1}^{8}\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\cos^4 t\,\mathrm{d}t$
16. $\displaystyle\int_{0}^{1}t\inf\left(\frac{1}{2},t\right)\mathrm{d}t$
17. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\lfloor\cos(t)+\inf(t,1)\rfloor\,\mathrm{d}t$

Exercice 9. *Intégration par parties.*

1. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{1}^{2}\ln t\ \ \mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{2}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}x^2\ln x\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{1}(2-t)\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$

(f) $\displaystyle\int_{0}^{1}t^2\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$

(g) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos(3x)\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{x}\sin x\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_{0}^{1}\arctan t\,\mathrm{d}t$

(j) $\displaystyle\int_{0}^{1}\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$

(k) $\displaystyle\int_{0}^{1}t\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$

(l) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{\ln(x+1)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int_{0}^{1}\ln(t+\sqrt{t^2+1})\,\mathrm{d}t$

2. On pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 t^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :
$x\longmapsto\ln(x+2)$ sur $]-2,+\infty[$ $\qquad x\longmapsto x^2\sin x$ sur $\mathbb{R}$
4. Soit $(\alpha,a)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Déterminer une primitive de $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos ax$.

Exercice 10. *Changement de variable.*

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$ par deux méthodes : avec $t=\sin x$ et sans changement de variable.
2. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}\quad(t=\tan\frac{x}{2})$

(d) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{\mathrm{d}t}{t(t^3+1)}\quad(u=t^3)$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t\cos^3 t\,\mathrm{d}t\quad(u=\sin t)$

3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ à l'aide du changement de variable $t=\mathrm{e}^x$.
(Ind. : il pourra être utile de déterminer des réels a, b et c tels que $\forall t\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{t(1+t^2)}=\dfrac{a}{t}+\dfrac{bt+c}{1+t^2}$.)
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{2\,\mathrm{d}x}{1+\tan x}$ à l'aide du changement de variable $t=\tan x$.
(Ind. : il pourra être utile de déterminer des réels a, b et c tels que $\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\dfrac{1}{(1+t)(1+t^2)}=\dfrac{a}{1+t}+\dfrac{bt+c}{1+t^2}$.)
5. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+a^2}$ $(a>0)$ sur $\mathbb{R}$

(b) $f(x)=\arctan(\sqrt{x})$ sur $\mathbb{R}^+$ $(x=u^2)$

(c) $f(x)=(2x+3)^{15}(x+2)$ sur $\mathbb{R}$

(d) $f(x)=x^3\sqrt{x^2-1}$ sur $[2,+\infty[$ $(u=x^2-1)$

Exercice 11.

1. Calculer $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}+x}$.

Sommes de Riemann

Exercice 12. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les limites des suites suivantes :

$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\qquad v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}\qquad w_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Limites d'intégrales

Exercice 13.

1. On suppose ici qu'on a $x\in[0,1]$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nx\mathrm{e}^{-nx^2}$.
2. Calculer $I_n=\displaystyle\int_0^1 nx\mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n$.
3. Quelle est la morale de cet exercice ?

Exercice 14. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^n t}{\cos t}\,\mathrm{d}t=0$.

Exercice 15. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t=0$.

Exercice 16. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-nt}}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$.

Exercice 17. Soient a et b deux réels avec $a<b$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ I_n=\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\quad\text{et}\quad J_n=\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $\lim I_n=\lim J_n=0$.

Divers

Exercice 18.

1. Justifier que : $\forall t\in[0,1[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}t^k=\frac{1}{1-t}-\frac{t^{n+1}}{1-t}$.

   En déduire que : $\forall x\in[0,1[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^k}{k}+\ln(1-x)=\int_0^x\frac{t^{n+1}}{t-1}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que $\forall x\in[0,1[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^k}{k}+\ln(1-x)\right|\leqslant\frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)}$ puis que

$$\forall x\in[0,1[,\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}=-\ln(1-x)$$

Exercice 19. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $I_n=\displaystyle\int_0^1 t^n\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0.

2. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
5. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \ln 2$.

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 20. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et g l'application qui à tout réel x associe $g(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Vérifier que g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   Même exercice avec $h(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $k(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. On considère $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x \frac{t^2}{1+t^8}\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est bien définie, continue et positive sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Montrer qu'elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x \frac{\mathrm{e}^t\cos t}{\sqrt{|t|+1}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 21. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Etudier la parité de f.
   (b) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
   (c) Montrer que f admet 0 pour limite en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. (a) Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Etudier les variations de f.

Exercice 22. On pose $u(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout réel x.

1. Montrer que l'on définit bien ainsi une application de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
2. (a) On suppose que a appartient à $[-2,2]$. Montrer que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^a (a-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}a^2\mathrm{e}^2$.
   (On sera amené à étudier séparément 2 cas).
   (b) Montrer que pour tout réel a, on a : $\mathrm{e}^a = 1 + a + \displaystyle\int_0^a (a-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$
   Quelle inégalité peut-on en déduire ?
3. Soit h un réel tel que $0 < |h| < 1$.
   (a) Ecrire, sans calculer, $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ pour tout réel x.
   (b) Montrer que l'on peut appliquer l'inégalité du 2b à $a = -h(1+t^2)$ pour tout $t \in [0,1]$.
   (c) En déduire que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = -\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
4. Pour tout réel x, on pose $v(x) = u(x^2)$ et $w(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$.
   (a) Montrer que v et w sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que pour tout réel x, on a $v'(x) = -w'(x)$.
   (c) Calculer $v(0)+w(0)$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ v(x)+w(x) = \dfrac{\pi}{4}$.
5. (a) Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $a > A \Longrightarrow 0 < \mathrm{e}^{-a} < \dfrac{1}{a}$.
   (b) On suppose que $x > A$. Montrer que l'on a : $0 \leqslant u(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.
   En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)$.
6. Soit $I = \lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $J = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$. Déduire de ce qui précède les valeurs de I et de J.