Espaces vectoriels

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

1. $\{P \in \mathbb{R}[x] \mid \forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) = P(x)\}$
2. $\{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg P \geqslant 17\}$
3. $\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + 2f' - f = 0\}$
4. $\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + f' = 1\}$
5. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$
6. $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\}$
7. $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1\}$
8. $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_n \longrightarrow 1\}$

Exercice 2. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Si oui, en déterminer une base.

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 1\}$
5. $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$
6. $F_6 = \{(x - y, x, 2x + y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
7. $F_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$
8. $F_8 = \{(x+y-z, x+2y-4z, 2x+y+z, x+y-z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$

Familles de vecteurs

Exercice 3. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ suivant :

$$F = \operatorname{Vect}\Big((1, 2, -1, 3)\ ,\ (-1, 1, 3, -2)\ ,\ (2, 4, 3, 2)\ ,\ (2, 1, 1, 1)\Big)$$

Exercice 4. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$F = \operatorname{Vect}\Big((4, -5, 3)\ ,\ (2, 3, -2)\ ,\ (4, -16, 10)\ ,\ (8, 1, -1)\Big)$$

Exercice 5. Déterminer une (ou des) équation(s) du sous-espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}\Big((1, 1, 1)\ ,\ (2, -1, 1)\ ,\ (-1, -4, -2)\Big)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. On considère les trois éléments $P : x \longmapsto 3 - x + 2x^2 + x^3$, $Q : x \longmapsto 3 + x + 3x^2 + x^3$ et $R : x \longmapsto 3 - 7x - x^2 + x^3$ de $\mathbb{R}_3[x]$. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}(P, Q, R)$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

Exercice 7. On considère les trois matrices $R = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que (R, S, T) est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8. On considère l'ensemble E des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} 2a + b & 3b - 5c & a \\ -b & a + b - c & a - 2c \\ c & b + c & 2b - c \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 9. Soient $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$, et $F = \operatorname{Vect}(I_3, A, A^2)$. Montrer que la famille (I_3, A, A^2) est une base de F.

Exercice 10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Supposons ici $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de F.

Exercice 11. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = P(1) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ et en donner une base.

Exercice 12. Montrer que $\Big(x^n, x^{n-1}(1-x), x^{n-2}(1-x)^2, \dots, (1-x)^n\Big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[x]$.

Exercice 13. Soient u, v, w trois suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n,\quad v_n = 3^n,\quad w_n = 4^n$$

Montrer que (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 14. Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_1(x) = \ln x \qquad f_2(x) = \mathrm{e}^x \qquad f_3(x) = x \qquad f_4(x) = \mathrm{e}^{x+3} \qquad f_5(x) = \frac{1}{x} \qquad f_6(x) = \ln(x^2)$$

Déterminer une base de $\mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$.

Exercice 15. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(g_0, \dots, g_n)$ est libre.

Sommes, sommes directes et supplémentaires

Exercice 16. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer que

$$F \subset G \Longrightarrow F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$$

Exercice 17. Soient a et b deux scalaires distincts de $\mathbb{R}$. On considère les parties E_a et E_b de $\mathbb{R}[x]$ définies par :

$$E_a = \Big\{P \in \mathbb{R}[x] \;\Big|\; \exists Q \in \mathbb{R}[x],\ P = (x-a)Q\Big\} \qquad \text{et} \qquad E_b = \Big\{P \in \mathbb{R}[x] \;\Big|\; \exists Q \in \mathbb{R}[x],\ P = (x-b)Q\Big\}$$

1. Montrer que E_a et E_b sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[x]$.
2. Montrer qu'il existe $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $c(x-a) + d(x-b) = 1$.
3. En déduire que $\mathbb{R}[x] = E_a + E_b$. La somme est-elle directe ?
4. Montrer que E_a et $\mathbb{R}_0[x]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[x]$.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $F = \{x^{n+1}A \mid A \in \mathbb{R}[x]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[x]$.

Exercice 19. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ impaires. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 20. Soient E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites convergeant vers 0 et G l'ensemble des suites constantes.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Exercice 21. Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, F l'ensemble des fonctions constantes de E et G l'ensemble des fonctions f de E vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.