Devoir surveillé 8 (interrogation écrite)

Vendredi 28 février 2025

Durée : 1h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : *les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.* Le sujet comporte 1 page(s).

Exercice 1. L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? Si oui, en déterminer une base.

Exercice 2. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = P(1) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ et en donner une base.

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un entier naturel $p \geqslant 2$ tel que $A^p = 0_n$ et $A^{p-1} \neq 0_n$. Montrer que la famille $(I_n, A, \dots, A^{p-1})$ est libre.

Exercice 4. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on pose

$$F = \{f \in E \mid f(0) + f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in E \mid f \text{ constante}\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. *On admet que G est aussi un sous-espace vectoriel de E.*
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Devoir surveillé 8 (interrogation écrite)

Vendredi 28 février 2025

Durée : 1h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : *les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.* Le sujet comporte 1 page(s).

Exercice 1. L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? Si oui, en déterminer une base.

Exercice 2. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = P(1) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ et en donner une base.

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un entier naturel $p \geqslant 2$ tel que $A^p = 0_n$ et $A^{p-1} \neq 0_n$. Montrer que la famille $(I_n, A, \dots, A^{p-1})$ est libre.

Exercice 4. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on pose

$$F = \{f \in E \mid f(0) + f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in E \mid f \text{ constante}\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. *On admet que G est aussi un sous-espace vectoriel de E.*
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.