Applications linéaires

Applications linéaires : exercices pratiques

Exercice 1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Si l'application est linéaire, on déterminera son noyau et son image.

1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, 2x-y) \end{array}$
2. $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z+1, x-z, -x+y+z) \end{array}$
3. $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2, 2x+y, xy) \end{array}$

Exercice 2. Soient $E = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid P(0) = 0\}$ et $f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ P(x) & \longmapsto & xP'(x) \end{array}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que f est un automorphisme de E.

Exercice 3. Soit f l'application définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[x],\ f(P)(x) = (x^2-1)P'(x) - 2xP(x)$ pour tout réel x.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Déterminer une base du noyau de f.
3. Déterminer une base de l'image de f.

Applications linéaires : exercices théoriques

Exercice 4. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer que :

1. $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$
2. $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$
3. $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$

Exercice 5. Soient E, F, G trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que

1. $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f \iff \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\}$
2. $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \iff \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F$

Exercice 6. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer f^n en fonction de f et de n.

Exercice 7. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 4f + 3\mathrm{id}_E = 0$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}.
2. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3\mathrm{id}_E)$.

Exercice 8. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E tel que $f^3 = f$. Montrer que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Im} f$$

Exercice 9. Soient E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, et S un sous-espace vectoriel de E stable par u et tel que $E = S + \operatorname{Im} u$.

1. Montrer par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ E = S + \operatorname{Im} u^k$.
2. En déduire que $S = E$.

Projections et projecteurs

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^3$, soient les sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}\Big((1, 2, 1)\Big)$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Déterminer $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 11.

1. Montrer que $\mathbb{R}_1[x]$ et $\text{Vect}\,(1 + x + x^2)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Déterminer alors la projection sur $\mathbb{R}_1[x]$ parallèlement à $\text{Vect}\,(1 + x + x^2)$.

Exercice 12. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que p est un projecteur si, et seulement si, $\text{id} - p$ l'est.
2. Dans ce cas, montrer alors $\text{Im}\,(\text{id} - p) = \text{Ker}\,(p)$ et $\text{Ker}\,(\text{id} - p) = \text{Im}\,(p)$.

Exercice 13. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $p + q$ est un projecteur
   (ii) $p \circ q + q \circ p = 0$
   (iii) $p \circ q = q \circ p = 0$
2. On suppose dans cette question que $p + q$ est un projecteur de E. Montrer que :
   (a) $\text{Im}\,(p + q) = \text{Im}\,(p) \oplus \text{Im}\,(q)$
   (b) $\text{Ker}\,(p + q) = \text{Ker}\,(p) \cap \text{Ker}\,(q)$

Exercice 14. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E. Montrer que :

1. $p \circ q = p \iff \text{Ker}\,(q) \subset \text{Ker}\,(p)$
2. $p \circ q = q \iff \text{Im}\,(q) \subset \text{Im}\,(p)$