

Devoir maison 9

Pour le lundi 10 mars 2025

On note u et f les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{array}{ccc} u : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ & (x, y, z, t) & \longmapsto (x + y, -x - y, -z + t, z - t) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ & (x, y, z, t) & \longmapsto (0, 0, -z + t, z - t) \end{array}$$

Pour tout entier k strictement positif, u^k désigne l'application $u \circ u \circ u \circ \dots \circ u$ (k fois) et u^0 désigne l'application identique de $\mathbb{R}^4$, notée $\text{id}_{\mathbb{R}^4}$. On note 0 l'endomorphisme identiquement nul de $\mathbb{R}^4$.

1. (a) Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$.
 (b) Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
 (c) Les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ de $\mathbb{R}^4$ sont-ils supplémentaires ?
2. (a) Montrer que : $\forall p \geq 2, u^p = (-2)^{p-1} f$.
 (b) En déduire un polynôme annulateur unitaire de degré minimal de u .
 (c) En déduire que $\mathbb{R}^4 = \text{Ker}(u^2) \oplus \text{Im}(u^2)$.
 (d) Exprimer en fonction de u la projection p sur $\text{Ker}(u^2)$ parallèlement à $\text{Im}(u^2)$.
 (e) Soit $k \geq 2$.
 Comparer $\text{Ker}(u^k)$ et $\text{Ker}(u^2)$, puis $\text{Im}(u^k)$ et $\text{Im}(u^2)$. A-t-on $\mathbb{R}^4 = \text{Ker}(u^k) \oplus \text{Im}(u^k)$?

Soit d l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ suivant :

$$\begin{array}{ccc} d : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto P' \end{array}$$

3. (a) L'endomorphisme d est-il injectif ? Est-il surjectif ?
 (b) Déterminer $\text{Ker}(d^q)$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$.
 (c) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. A-t-on $\mathbb{R}[X] = \text{Ker}(d^q) \oplus \text{Im}(d^q)$?