Devoir maison 10

Les parties I et II sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie I : recherche d'un équivalent de la factorielle.
On définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^n n!} \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

1. *On admet que* $\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1 = \frac{1}{12x^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
   Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante à partir d'un certain rang.
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.
   En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est majorée.
4. Montrer qu'il existe un réel C positif tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \frac{C}{n^2}$.
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
6. En déduire qu'il existe un réel ℓ strictement positif tel que

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \ell\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Partie II : intégrales de Wallis.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\ \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\ \mathrm{d}x$$

1. A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_n = J_n$ pour tout entier naturel n.
2. *Convergence de la suite* $(I_n)_{n\geqslant 0}$.
   Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. En déduire que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.
3. *Calcul des intégrales* I_{2p} *et* I_{2p+1}.
   (a) Calculer I_0 et I_1.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
   (c) En déduire des expressions de I_{2p} et I_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.
4. *Un équivalent de* I_n.
   (a) Justifier que, pour tout $n \geqslant 0$, $I_n > 0$. Montrer ensuite qu'on a $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$.
   (b) Montrer que $(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$, pour tout $n \geqslant 0$.
   (c) Déduire, de tout ce qui précède, que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie III : formule de Stirling.

1. En utilisant I_{2n}, montrer que $\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.
2. En déduire la valeur de ℓ et établir que

$$\boxed{n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} \quad \text{(formule de Stirling)}$$