Devoir surveillé 9

Samedi 15 mars 2025
Durée : 3h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : ***les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*** **Le sujet comporte 2 page(s).**

Exercice 1.

On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et un endomorphisme s de E vérifiant $s \circ s = \mathrm{id}_E$. On pose $p = \dfrac{1}{2}(s + \mathrm{id}_E)$.

1. Montrer que p est un projecteur de E.
2. En déduire que $E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$.

Exercice 2.

Partie 1. Etude d'une application linéaire

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2y + 2z, -2x + 4y + 2z, 2x - 2y)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base du noyau de f.
3. Déterminer une base de l'image de f.
4. Calculer $f^2(x,y,z) - 2f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
5. En remarquant que $(x,y,z) = \dfrac{1}{2}f(x,y,z) + \Big((x,y,z) - \dfrac{1}{2}f(x,y,z)\Big)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, montrer que l'on a $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) + \mathrm{Ker}\,(f)$.
6. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f)$?

Partie 2. Etude du cas général

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et a et b deux réels distincts. Dans toute cette partie, on note id l'application identité de E, 0 l'endomorphisme nul de E et f désigne un endomorphisme de E vérifiant :

$$f^2 - (a+b)f + ab\,\mathrm{id} = 0 \quad (*)$$

7. Déterminer les réels α tels que $\alpha\,\mathrm{id}$ vérifie la relation $(*)$.
8. Déterminer une condition suffisante portant sur les 2 réels a et b pour que f soit bijective. Calculer alors f^{-1}.
9. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(f - a\,\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - b\,\mathrm{id})$.

On suppose désormais que f n'est pas de la forme $\alpha\,\mathrm{id}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

10. (a) Montrer qu'il existe un unique couple de réels (λ, μ) tel que $f = \lambda(f - a\,\mathrm{id}) + \mu(f - b\,\mathrm{id})$. On déterminera λ et μ.
    (b) En déduire qu'il existe deux projecteurs p et q tels que $f = bp + aq$ et $q \circ p = p \circ q = 0$.
11. On suppose désormais que a et b sont non nuls.
    (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^n = b^n p + a^n q \quad (\sharp)$.
    (b) Pour tout entier $m > 0$, si f est bijective, on définit f^{-m} par $f^{-m} = (f^{-1})^m = (f^m)^{-1}$.
    La relation $(\sharp)$ est-elle vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 3.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - x - 1$$

1. (a) Montrer que f est bijective de $[1, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$.
   (b) En déduire qu'il existe une fonction g continue sur $[-1, +\infty[$ telle que
   $$\forall x \in [-1, +\infty[, \ (g(x))^3 - g(x) - 1 = x$$
   (c) Dresser le tableau de variation de g.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique $x_n \in [1, +\infty[$ tel que $f(x_n) = n$.
   (b) Etudier la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.
   (c) Déterminer un équivalent de x_n.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique $y_n \in [1, +\infty[$ tel que $f(y_n) = -\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   (b) Etudier la monotonie de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ et montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ a pour limite 1.
   (c) Donner un équivalent simple de $1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   (d) On pose $\varepsilon_n = y_n - 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
   Montrer que $2\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ puis en déduire un équivalent de $y_n - 1$.