Devoir surveillé 10 (interrogation écrite)

Vendredi 28 mars 2025

Durée : 1h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : ***les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*** **Le sujet comporte 1 page(s).**

Exercice 1. Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x\sin(x)} & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que g est continue sur son domaine de définition.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$ pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$$

   (b) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Devoir surveillé 10 (interrogation écrite)

Vendredi 28 mars 2025

Durée : 1h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : ***les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*** **Le sujet comporte 1 page(s).**

Exercice 1. Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x\sin(x)} & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que g est continue sur son domaine de définition.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$ pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$$

   (b) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.