

Comparaison des suites et des fonctions

COMPARAISON DE SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1. Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $u_n = 2n^4 - n^3 + n + 1$ | 4. $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ |
| 2. $u_n = 2\sqrt{n} + \cos(n) - (\ln n)^2$ | 5. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ |
| 3. $u_n = 5^n + n^{12}$ | 6. $u_n = n + \sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}$ |

Exercice 2. Trouver un équivalent simple de chacune des suites suivantes et donner leur limite :

- | | | |
|------------------------------------|--|---|
| 1. $u_n = (n + 3 \ln n)e^{-(n+1)}$ | 3. $u_n = \frac{2^{2n} + n3^n}{2^{2n} - n3^n}$ | 5. $u_n = \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt[3]{n^2 - n + 1}}$ |
| 2. $u_n = 3^n - n^2 2^n$ | 4. $u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{n + 1}$ | |

Exercice 3.

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$.
2. En déduire un équivalent de $\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.

Exercice 4. Constante d'Euler γ .

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

1. Montrer que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite $\gamma \in [0, 1]$.
(On pourra se servir de l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$.)
2. Donner un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. Déterminer la limite de la suite (S_n) .
3. On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite (u_n) converge.
4. Donner un équivalent simple de la suite (S_n) .

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

4. Montrer que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
5. En déduire que

$$u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

COMPARAISON DE FONCTIONS

Exercice 7. Donner un équivalent le plus simple possible des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto 7x^5 + 2x^3 - x^2 + x$ en 0 et en $+\infty$.
2. $f : x \mapsto e^x + \sin x + \cos x + \frac{1}{x}$ en 0 et en $+\infty$.
3. $f : x \mapsto x^5 + \ln x - 3$ en 0^+ et en $+\infty$.
4. $f : x \mapsto e^x + e^{2x} + e^{3x} - 3$ en $+\infty$.
5. $f : x \mapsto \ln |e^x - 1|$ en 0 et en $+\infty$.
6. $f : x \mapsto \frac{x^{-x} - 1}{\sqrt{x} - 1 - \cos x}$ en $+\infty$.

Exercice 8. Comparer (prépondérance ou équivalence) les fonctions suivantes :

1. $(x^x)^x$ et $x^{(x^x)}$ au voisinage de $+\infty$
2. $x^{\ln x}$ et $(\ln x)^x$ au voisinage de $+\infty$
3. $(e^x - 1)^3$ et $x \sin x$ au voisinage de 0
4. $\ln(x) \ln(1+x)$ et $\ln(x^2) \sin(x^2)$ au voisinage de 0^+

Exercice 9. A l'aide d'équivalents, calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$, avec $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x \ln x)}{x}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$, avec $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, avec $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$
6. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) \ln(1-x)$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + \ln x} - x)$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x^2}$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{5}}}{(x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}} x^{\frac{2}{15}}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2} \right)^{\frac{1}{x}}$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$
13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}}$.

1. Montrer qu'après prolongement en 0, f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f ainsi prolongée est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln x} \right)$.

1. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{f(x)} - 1) \ln x$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^x - 1 \right] \ln x$.

SUITES DÉFINIES IMPLICITEMENT

Exercice 12. Soit n un entier naturel et (E_n) l'équation $x + \ln x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation (E_n) possède une solution unique notée x_n .
2. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.
3. Donner un équivalent simple de la suite (x_n) .