

Dérivées successives

ALGÈBRE : CAS DES POLYNÔMES

Exercice 1. Quel est la multiplicité de la racine 1 du polynôme $x \mapsto nx^{n+2} - (n+2)x^n + (n+2)x - n$ ($n \geq 1$) ?

Exercice 2. Montrer que, pour tout entier naturel n , le polynôme $P_n : x \mapsto 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ n'a pas de racine multiple.

Exercice 3. Montrer que :

1. $(x-1)^2$ divise $x^{n+1} - x^n - x + 1$ ($n \in \mathbb{N}$).
2. $(x-1)^2$ divise $\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)^2 - n^2 x^{n-1}$ ($n \geq 2$).

Exercice 4. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[x]$ tels que $\begin{cases} \deg(P) = 6 \\ (x-1)^3 \text{ divise } P(x) + 1 \\ x^4 \text{ divise } P(x) + 2 \end{cases}$

(Indication : chercher d'abord P' .)

Exercice 5.

1. Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré au moins égal à 2 vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1)P''(x) - 6P(x) = 0$. Quel est le terme dominant de $x \mapsto (x^2 + 1)P''(x) - 6P(x)$? Que déduire du degré de P ?
2. En déduire tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1)P''(x) - 6P(x) = 0$.

ANALYSE : CAS DES FONCTIONS

DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

Exercice 6. Quelle est la classe de la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ x+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$?

Exercice 7. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$.
3. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Justifier que chacune des fonctions suivantes est dérivable n fois puis en donner la dérivée n -ième ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).

- | | |
|----------------------------|---|
| 1. $x \mapsto \frac{1}{x}$ | 5. $x \mapsto \sin(ax+b)$ où $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ |
| 2. $x \mapsto \ln(x)$ | 6. $x \mapsto x^2 e^x$ |
| 3. $x \mapsto \sin x$ | 7. $x \mapsto (1+x)^n x^2$ |
| 4. $x \mapsto \cos x$ | |

Exercice 9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et la fonction $f_n : x \mapsto x^{n-1} \ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer $f_n^{(n)}$.

FONCTION RÉCIPROQUE

Exercice 10. Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 + x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f admet une réciproque g dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer g' en fonction g .
2. Quelle est la classe de g ?

THÉORÈME DE ROLLE ET THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

Exercice 11. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe trois points de la courbe de f alignés.

Montrer que f'' s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.

(Ind. : si $x < y < z$ sont les abscisses des trois points alignés, comparer $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ et $\frac{f(z) - f(y)}{z - y}$.)

DES INÉGALITÉS

Exercice 12. Montrer les inégalités suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, 2x < \sin 2x + \tan x$ | 3. $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin x \geq \frac{2}{\pi}x + \frac{x}{12\pi}(\pi^2 - 4x^2)$ |
| 2. $\forall x \in]-\pi, \pi[, \ln(1 + \cos x) \leq \ln 2 - \frac{1}{4}x^2$ | 4. $\forall x \in]0, +\infty[, e^{\frac{x}{x+1}} < 1 + x$ |

FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL ET INÉGALITÉ DE TAYLOR-LAGRANGE

Exercice 13. Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Exercice 14. Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \tan x \geq x + \frac{x^3}{3}$.

Exercice 15. Grâce à la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction $t \mapsto \ln t$, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$