Extrema et convexité

Exercice 1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = 0$ et $f^{(4)}(x_0) > 0$. Montrer que f admet un minimum local en x_0.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x(\ln x)^2$. Etudier la continuité de f (et l'existence d'un prolongement par continuité en 0), sa dérivabilité, dresser son tableau de variation , étudier sa concavité et tracer sa courbe représentative.

Exercice 3. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3x\mathrm{e}^{-x^2} - 1$$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Dresser le tableau de variations de f. Préciser les branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.
2. Etudier la concavité de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f. Préciser les éventuels points d'inflexion.
3. (a) Pourquoi f admet-elle des développements limités en 0 à n'importe quel ordre ?
   (b) Donner le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 5.
4. Donner l'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}_f$. Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente au voisinage de 0. Quel résultat retrouve-t-on ?

Exercice 4. En utilisant des arguments de convexité, montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$
3. $\forall (x,y) \in]1, +\infty[^2,\ \sqrt{\ln(x)\ln(y)} \leqslant \ln \dfrac{x+y}{2}$

Exercice 5. *Moyennes harmonique, arithmétique et géométrique*
Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{*+})^n$, on a

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Exercice 6. *Inégalités de Hölder et de Minkowski*

1. Soient x et y deux réels strictement positifs, p et q deux réels strictement supérieurs à 1 vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   Montrer que :
   $$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$
2. Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels strictement positifs.
   En appliquant la question précédente aux réels $x_i = \dfrac{a_i}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n {a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ et $y_i = \dfrac{b_i}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n {b_i}^q\right)^{\frac{1}{q}}}$, $i \in [\![1, n]\!]$, montrer l'inégalité de Hölder :
   $$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n {a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n {b_i}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
3. Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels strictement positifs. Montrer l'inégalité de Minkowski :
   $$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n {a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n {b_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
   (*Ind. : on pourra écrire* $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$.)

Exercice 7. Soient I un intervalle d'intérieur non vide et f une fonction continue, convexe et strictement décroissante sur I. Montrer que sa fonction réciproque f^{-1} est convexe sur $f(I)$. Que peut-on dire si f est continue, convexe, strictement croissante ?