Séries numériques réelles

Nature de séries

Exercice 1. Déterminer la nature des séries de terme général

(a) $\dfrac{(-1)^{n!}}{n}$

(b) $\dfrac{n+1}{n^2}$

(c) $\dfrac{1}{n-\sqrt{n}}$

(d) $\dfrac{1}{n^2+\ln n}$

(e) $\dfrac{1}{n^2\sqrt{n}+\mathrm{e}^{-n}}$

(f) $\dfrac{\ln n}{n}$

(g) $\dfrac{\ln n}{n^2}$

(h) $\dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^2}$

(i) $\dfrac{n+5}{2n+7}$

(j) $n^3\mathrm{e}^{-n}$

(k) $P(n)\mathrm{e}^{-n}$ où $P \in \mathbb{R}[x]$

(l) $\left(\dfrac{n+3}{4n-1}\right)^n$

Exercice 2. Déterminer la nature des séries de terme général

(a) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}$

(b) $\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

Exercice 3. Déterminer la nature des séries de terme général

(a) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

(b) $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Exercice 4. *Critère spécial des séries alternées*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive décroissante de limite nulle. On considère la série $\sum(-1)^n a_n$ et on note S_n sa n-ième somme partielle.
Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes puis en déduire que $\sum(-1)^n a_n$ converge.

Exercice 5. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

1. Montrer que, si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et : $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.
2. Montrer que, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Nature et somme de séries

Exercice 6. Montrer la convergence des séries suivantes de terme général u_n et en calculer la somme :

(a) $u_n = \dfrac{1}{n^2-1}$ $(n \geqslant 2)$ (Chercher des réels a et b tels que $\dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n-1}$.)

(b) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $(n \geqslant 1)$ (Chercher des réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.)

(c) $u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ $(n \geqslant 2)$

(d) $u_n = \dfrac{n-1}{3^{n+1}}$ $(n \geqslant 0)$

(e) $u_n = \dfrac{n^2+3n}{2^n}$ $(n \geqslant 0)$

(f) $u_n = \dfrac{n^2+2^n}{n!}$ $(n \geqslant 0)$

(g) $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{n!}5^n$ $(n \geqslant 0)$

Exercice 7. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ $(n \geqslant 0)$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 8. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$ et $b_n = \dfrac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.
2. Calculer leur somme.

Séries et suites

Exercice 9. *Constante d'Euler*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

1. Montrer que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.
2. En déduire qu'il existe un réel γ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ puis donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 10.

1. Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
2. En déduire la nature de la suite de terme général $x_n = \dfrac{n!\ \mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. (On pourra considérer $\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$.)

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a \in]0,1[$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente vers 0.
2. Démontrer que $\sum u_n^2$ converge et calculer sa somme.
3. Démontrer que la série de terme général $\ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est divergente.
4. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Petit problème

Exercice 12.

Question préliminaire :

La suite (x_n) est une suite de nombres réels positifs. Montrer que si la série de terme général x_n converge, alors la série de terme général x_n^2 converge aussi (on montrera qu'il existe un entier naturel N tel que : si $n \geqslant N$, alors $x_n^2 \leqslant x_n$).

On considère, d'une part, la fonction numérique, notée ch, définie par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, et d'autre part, la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\mathrm{ch}(u_n)} \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Etudier la fonction ch et dresser son tableau de variation.
2. Donner le développement limité à l'ordre 2 de ch au voisinage de 0.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.
   (b) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
4. On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative.
   (b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.
   (c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$. En déduire que la série de terme général v_n est divergente.
5. (a) Montrer que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$.
   (b) En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente.
   (c) En utilisant le préliminaire, conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.