

Devoir maison 11

Pour le jeudi 24 avril 2025

1. Montrer que lorsque x est au voisinage de 0 on a

$$\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + o(x^2)$$

2. (a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a

$$2 - e^{\frac{1}{k}} \in]0, 1[$$

- (b) En déduire le signe de $\ln\left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right)$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2.

- (c) Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right)$?

- (d) Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose

$$V_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right) \quad \text{et} \quad u_n = \exp V_n$$

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

3. (a) Montrer que

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^n \left[\ln\left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right]$$

- (b) Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln\left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

- (c) En déduire que u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $\frac{K}{n}$ avec $K > 0$.

Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

4. On pose

$$S_n = \sum_{k=2}^n (-1)^k u_k$$

- (a) Etudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.
- (b) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont deux suites adjacentes.
- (c) En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.