

Devoir surveillé 11

Samedi 26 avril 2025

Durée : 4h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être encadrés. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : *les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées*. Le sujet comporte 3 page(s).

Exercice 1.

Partie A

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + 2xf(x) = 1$$

1. (a) Prouver que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
(b) Quelle est la valeur de $f'(0)$?
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+2)}(x) = -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x)$.
3. (a) Montrer que f admet en 0 un développement limité à tout ordre p (p entier naturel).
Écrivons un tel développement limité au moyen d'une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^p).$$

(b) A l'aide du résultat de la question 2, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+3} = \frac{-2}{2k+3} a_{2k+1}$.

(c) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+1} = \frac{(-4)^k \cdot k!}{(2k+1)!}$.

On pourrait montrer de même que : $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k} = \frac{(-1)^k f(0)}{k!}$ (ce que l'on admet donc).

Partie B

On considère la fonction de la variable réelle $D : x \longmapsto D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

1. Justifier le fait que D est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, D'(x) + 2xD(x) = 1$.
2. Étudier la parité de D .
3. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, xe^{-x^2} \leq D(x) \leq x$.
4. (a) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$.
(b) Soit la fonction $h : t \longmapsto \frac{e^{t^2}}{t^2}$. Montrer que h est croissante sur $[1, +\infty[$.
(c) En déduire que : $\forall x \in [1, +\infty[, \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leq h(x) \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$.
(d) Montrer alors que : $\int_1^x e^{t^2} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$.
(e) En déduire enfin un équivalent de $D(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2.

A toutes fins utiles, on donne $31^2 = 961$, $32^2 = 1024$, $6^4 = 1296$ et $7^4 = 2401$.

1. Rappeler, en fonction du réel α , la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

On note alors $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et pour tout entier naturel N non nul : $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ et $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. (a) En étudiant la monotonie de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^2}$$

- (b) En déduire que pour tout entier naturel N non nul :

$$\frac{1}{N+1} \leq R_N \leq \frac{1}{N}$$

3. Déterminer un entier naturel N_0 tel que : $\forall N \geq N_0$, $|S_N - S| \leq 10^{-3}$.
4. Ecrire un programme en Python qui détermine un tel entier N_0 , calcule une valeur approchée de S à 10^{-3} près et affiche ces deux nombres.
5. On pose pour tout entier naturel N non nul : $T_N = S_N + \frac{1}{N+1}$.

- (a) Montrer que pour tout entier naturel N non nul :

$$|T_N - S| \leq \frac{1}{N^2}$$

- (b) Déterminer un entier naturel N_1 strictement inférieur à N_0 tel que : $\forall N \geq N_1$, $|T_N - S| \leq 10^{-3}$.
- (c) Ecrire un programme en Python qui détermine un tel entier N_1 , calcule une valeur approchée de S à 10^{-3} près et affiche ces deux nombres.

On pose maintenant pour tout couple (n, p) d'entiers naturels non nuls :

$$u_n(p) = \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+p)}$$

6. Soit p un entier naturel non nul.
 - (a) Donner un équivalent simple de $u_n(p)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 - (b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n(p)$.

On pose pour tout entier naturel p non nul :

$$U(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(p)$$

7. (a) Déterminer deux réels a, b vérifiant pour tout entier naturel n non nul : $u_n(1) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
 - (b) En déduire la valeur de $U(1)$.
8. (a) Exprimer $u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1)$ en fonction de p et de $u_n(p)$, pour tout couple d'entiers naturels (n, p) tel que $n \geq 1$ et $p \geq 2$.
 - (b) Montrer que pour tout entier naturel p non nul : $U(p) = \frac{1}{p \times p!}$.
9. (a) Montrer, par récurrence sur p , que pour tout entier naturel p non nul et tout entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{p!}{n^2(n+1) \cdots (n+p)} + \sum_{k=1}^p (k-1)! u_n(k)$$

- (b) En déduire que pour tout entier naturel p non nul : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1) \cdots (n+p)}$ converge et

$$S = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} + p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1) \cdots (n+p)}$$

10. En reprenant la méthode de la question 2, que l'on appliquera cette fois à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{p+2}}$, montrer que pour tout couple (N, p) d'entiers naturels non nuls :

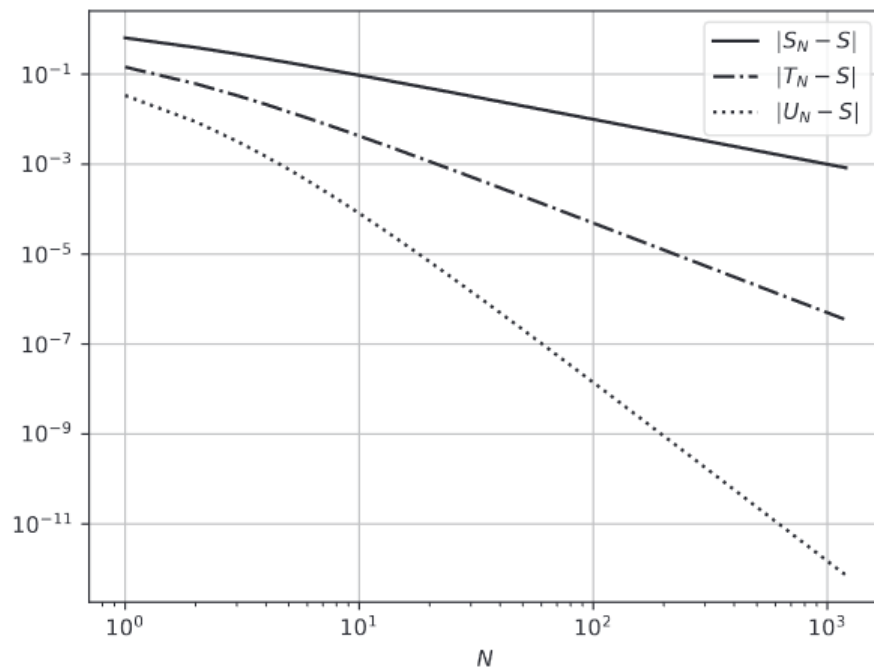
$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1) \cdots (n+p)} \leq \frac{1}{p+1} \times \frac{1}{N^{p+1}}$$

11. On suppose maintenant que $p = 3$. On pose donc pour tout entier naturel N non nul :

$$U_N = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k^2} + 3! \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{49}{36} + 6 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Déterminer un entier N_2 tel que : $\forall N \geq N_2, |U_N - S| \leq 10^{-3}$.

12. On représente sur la figure ci-dessous l'évolution des erreurs d'approximation de S par S_N, T_N et U_N , respectivement. Commenter ce graphique, à la lumière des réponses apportées aux questions précédentes.



ÉVOLUTION DES ERREURS D'APPROXIMATION DE S PAR S_N, T_N ET U_N .