Espaces probabilisés

Exercice 1.

1. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Montrer que :
$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$$
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ telle que la série $\sum \mathrm{P}(A_n)$ converge. Montrer que :
$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

Exercice 2.

1. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que $\mathrm{P}(\{n\}) = a\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Dans ce cas, déterminer la probabilité de l'événement A : «l'entier est pair».

Exercice 3. Montrer qu'il existe une unique probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que $\mathrm{P}(\{n+2\}) = \dfrac{7}{2}\mathrm{P}(\{n+1\}) - \dfrac{3}{2}\mathrm{P}(\{n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Un joueur dispose d'une infinité d'urnes numérotées par les entiers naturels non nuls. L'urne numéro $n \geqslant 1$ peut être choisie avec la probabilité $\dfrac{1}{2^n}$. Elle contient 1 boule blanche et $2^n - 1$ boules noires. Le joueur choisit une urne et tire une boule au hasard dans celle-ci : quelle est la probabilité que cette boule soit blanche ?

Exercice 5. On réalise une suite infinie de lancers d'une pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0,1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note F_i l'événement « on obtient FACE au i-ème lancer ».

1. Quelle est la probabilité de l'événement A_n : « on obtient FACE au n-ième lancer et ce pour la première fois » ?
2. Quelle est la probabilité de l'événement J : « on n'obtient jamais FACE » ?

Exercice 6. On réalise une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'événement «on obtient pile au n-ième lancer», F_n l'événement «on obtient face au n-ième lancer», et A_n l'événement «on obtient au moins une fois la séquence pile-pile-face au cours des n premiers lancers».

1. Déterminer $\mathrm{P}(A_1)$, $\mathrm{P}(A_2)$ et $\mathrm{P}(A_3)$.
2. Soit $n \geqslant 1$.
   (a) Montrer que $A_{n+3} = A_{n+2} \cup (\overline{A_n} \cap P_{n+1} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3})$.
   (b) En déduire $\mathrm{P}(A_{n+3}) = \mathrm{P}(A_{n+2}) + \dfrac{1}{8}(1 - \mathrm{P}(A_n))$.
3. Sans chercher à calculer $\mathrm{P}(A_n)$, montrer que la suite $(\mathrm{P}(A_n))_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.
4. En déduire $\mathrm{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big)$.

Exercice 7. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs dans l'urne selon le protocole suivant :

— si la boule blanche est tirée, on s'arrête ;
— si une boule noire est tirée, elle est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, autant de boules noires que l'urne contient de boules.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n l'événement «avoir une boule noire au n-ième tirage» et A_n l'événement «n'avoir que des boules noires au cours des n premiers tirages».

1. Quelle est la composition de l'urne lors du n-ième tirage (s'il a lieu) ?
2. Montrer que $\mathrm{P}(A_n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$. En déduire que $\ln(\mathrm{P}(A_n))$ tend vers un réel strictement négatif lorsque n tend vers $+\infty$.
3. En déduire que $\mathrm{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) \in]0,1[$.
4. En déduire que la probabilité que la succession de tirages s'arrête n'est pas égale à 1.

Exercice 8. On considère deux urnes :

— une urne verte contenant 1 boule rouge et 3 boules vertes,
— une urne rouge contenant 2 boules rouges et 2 boules vertes.

On effectue une suite de tirages d'une boule, avec remise de la boule dans l'urne d'où elle vient, de la façon suivante :

— le premier tirage est effectué dans l'urne verte,
— pour $k \geqslant 2$, le k-ième tirage est effectué dans l'urne dont la couleur est celle de la boule obtenue au $(k-1)$-ième tirage.

Pour tout entier n non nul, on note V_n l'événement «obtenir une boule verte lors du n-ième tirage», v_n la probabilité de V_n et R_n l'événement «obtenir une boule rouge lors du n-ième tirage».

1. **Les trois premiers tirages.**
   Déterminer la probabilité des événements

   (a) A : «on tire la première boule verte au troisième tirage»,
   (b) B : «on tire la première boule rouge au troisième tirage»,
   (c) C : «on tire au moins une boule verte dans les trois premiers tirages»,
   (d) D : «on tire une seule boule rouge lors des trois premiers tirages».

2. **Les deux premiers tirages.**
   On a obtenu une boule verte au second tirage. Quelle est la probabilité que le premier tirage ait donné une boule rouge ?
3. **Le n-ième tirage.**
   (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, déterminer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. **La première boule rouge et la première boule verte.**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soient X_n l'événement «la première boule rouge apparait au tirage numéro n» et Y_n l'événement «la première boule verte apparait au tirage numéro n».
   (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $\mathrm{P}(X_n)$ et $\mathrm{P}(Y_n)$.
   (b) Justifier la convergence de la série de terme général $n\mathrm{P}(X_n)$ et en déterminer la somme.
   (c) Montrer que l'on tire presque sûrement une boule verte au cours de la suite de tirages.

Exercice 9. Deux joueurs A et B jouent avec un dé parfaitement équilibré. Le joueur A commence et lance le dé une fois : s'il obtient 1 ou 2, il a gagné et la partie s'arrête. Sinon, le joueur B lance le dé une fois : s'il obtient $3, 4$ ou 5, il a gagné et la partie s'arrête. Sinon, c'est à A de lancer le dé...
On définit les événements :
- A_{2n+1} : «A gagne au $(2n+1)$-ième lancer» ($n \in \mathbb{N}$),
- B_{2n+2} : «B gagne au $(2n+2)$-ième lancer» ($n \in \mathbb{N}$),
- G_A : «A gagne la partie»,
- G_B : «B gagne la partie».

1. Calculer $\mathrm{P}(A_{2n+1})$ et $\mathrm{P}(B_{2n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\mathrm{P}(G_A)$ et $\mathrm{P}(G_B)$.
3. Quelle est la probabilité que la partie ne s'arrête jamais ?

Exercice 10. Deux pièces de monnaie numérotées 1 et 2 amènent PILE avec les probabilités respectives p_1 et p_2, et FACE avec les probabilités respectives $q_1 = 1-p_1$ et $q_2 = 1-p_2$. On suppose $0 < p_1 < 1$ et $0 < p_2 < 1$.
Au départ, on choisit une des deux pièces au hasard puis on joue le premier lancer avec la pièce choisie :
- si le résultat est PILE, on joue le lancer suivant avec la même pièce,
- si le résultat est FACE, on change de pièce pour le lancer suivant.

On recommence ce processus et on joue une suite de lancers.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note
- A_n l'événement «on joue le n-ième lancer avec la pièce 1»,
- P_n l'événement «on obtient PILE au n-ième lancer».

On pose $a_n = \mathrm{P}(A_n)$ et $u_n = \mathrm{P}(P_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Déterminer a_2 en fonction de p_1 et p_2.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer a_n en fonction de n, p_1 et p_2.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer u_n en fonction de a_n, p_1 et p_2.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en fonction de p_1 et p_2.
3. On joue le deuxième lancer avec la pièce 1. Déterminer, en fonction de p_1 et p_2, la probabilité que le premier lancer ait été effectué avec la pièce 2 ?
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, en fonction de n, p_1 et p_2, la probabilité v_n que, pour la première fois, on joue avec la pièce 1 au n-ième lancer.
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Comment interpréter ce résultat ?