Programme de khôlles n°1

Semaine du 16 septembre 2024

Raisonnements

1. Vocabulaire logique : assertion, axiome, négation, conjonction, disjonction, implication, CN, CS, réciproque, contraposée, équivalence, CNS, distributivité du et par rapport au ou, distributivité du ou par rapport au et, lois de De Morgan, négation d'une implication.
2. Quantificateurs : $\forall$, $\exists$, $\exists!$, règles de permutation des quantificateurs, négation d'une assertion avec quantificateurs.
3. Méthodes pour démontrer une assertion, une implication, une équivalence.
4. Récurrence simple, double, multiple, forte.

Note aux khôlleurs :
Pas de table de vérité ni d'exercice théorique sur la partie logique.

Calcul

1. Sommes et produits finis : notations $\sum$ et $\prod$, règles de calcul, changement d'indice, sommes et produits téléscopiques, $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} k^3$, $\sum_{k=0}^{n} q^k$, identité géométrique $a^n - b^n = ...$
2. Sommes doubles de la forme $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}$, $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij}$ et $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}$.
3. Vocabulaire sur l'ordre : majorant, minorant, plus grand élément, plus petit élément.
4. Le cas des entiers : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément, toute partie non vide et minorée (resp. majorée) de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit (resp. grand) élément.
5. Ordre des réels : borne supérieure, inférieure, toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (resp. inférieure) dans $\mathbb{R}$.
6. Fonctions usuelles : valeur absolue, partie entière, sin, cos, tan, exp, ln, $x \longmapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Questions de cours (10 minutes maximum) :

- calcul de $\sum_{k=0}^{n} k$ ou $\sum_{k=0}^{n} k^2$ ou $\sum_{k=0}^{n} k^3$ ou $\sum_{k=0}^{n} q^k$
- demander à l'élève tout ce qu'il sait d'une fonction usuelle au choix (domaine de définition, parité éventuelle, périodicité éventuelle, domaine de continuité, domaine de dérivabilité, formule de la dérivée, tableau de variation avec limites et allure de la courbe).

Programme de khôlles n°2

Semaine du 23 septembre 2024

Raisonnements

Voir programme 1.

Calcul

Voir programme 1.
Formulaire de trigonométrie.

Questions de cours (10 minutes maximum) :

- calcul de $\sum_{k=0}^{n} k$ ou $\sum_{k=0}^{n} k^2$ ou $\sum_{k=0}^{n} k^3$ ou $\sum_{k=0}^{n} q^k$
- demander à l'élève tout ce qu'il sait d'une fonction usuelle au choix (domaine de définition, parité éventuelle, périodicité éventuelle, domaine de continuité, domaine de dérivabilité, formule de la dérivée, tableau de variation avec limites et allure de la courbe).

Programme de khôlles n°3

Semaine du 30 septembre 2024

Calcul

Formulaire de trigonométrie.

Systèmes d'équations linéaires

Systèmes d'équations linéaires, systèmes échelonnés, pivot de Gauss.

Ensembles et applications

1. Les ensembles : inclusion, égalité, ensemble des parties, opérations sur les parties (complémentaire, réunion, intersection, différence), propriétés de ces opérations (dont les distributivités et les lois de De Morgan), produit cartésien d'ensembles.

Questions de cours (5 minutes maximum) :

Le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.

Programme de khôlles n°4

Semaine du 7 octobre 2024

Systèmes d'équations linéaires

Systèmes d'équations linéaires, systèmes échelonnés, pivot de Gauss.

Ensembles et applications

1. Les ensembles : inclusion, égalité, ensemble des parties, opérations sur les parties (complémentaire, réunion, intersection, différence), propriétés de ces opérations (dont les distributivités et les lois de De Morgan), produit cartésien d'ensembles.
2. Définition d'une application, égalité, composition, restriction, prolongement, image d'une partie.
3. Injection : définition, la composée de deux injections est une injection.
4. Surjection : définition, la composée de deux surjections est une surjection.
5. Bijection : définition, stabilité par composition, application réciproque, $f : E \longrightarrow F$ est bijective ssi il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$, réciproque de f^{-1} et de $g \circ f$.

Note aux khôlleurs : l'image réciproque d'une partie n'est pas au programme.

Questions de cours (10-15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de : «si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective».
   — Preuve de : «si $g \circ f$ est injective alors f est injective».
   — Preuve de : «si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective».
   — Preuve de : «si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective».

Programme de khôlles n°5

Semaine du 14 octobre 2024

Les applications Voir programme 4.

Suites numériques réelles

1. Définition, majoration, minoration, monotonie.
2. Suites arithmético-géométriques, suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants (le cas où l'équation caractéristique n'a aucune solution réelle est hors-programme).
3. Comportement asymptotique d'une suite :
   (a) Limites finies, suites convergentes : définition, propriétés (dont «(u_n) converge vers ℓ ssi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ»).
   (b) Limites infinies : définitions, toute suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est minorée (resp. majorée).
   (c) Limites et relation d'ordre : si $u_n \longrightarrow \ell$ et $\ell < M$ (resp. $\ell > m$) alors $u_n < M$ (resp. $u_n > m$) à partir d'un certain rang, passage à la limite dans les inégalités, théorèmes d'existence de limite par comparaison (gendarmes...).
   (d) Limites de λu_n, de la somme, du produit, de l'inverse, du quotient.
   (e) Croissance comparée : comparaison des suites $n!$, n^a, q^n et $(\ln n)^b$.
4. Théorème de la limite monotone et théorème des suites adjacentes.

Note aux khôlleurs : **pas encore de suites définies implicitement.**

Questions de cours (10-15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Enoncer *précisément* une définition, proposition, théorème... du cours.
   — Preuve de : «si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective».
   — Preuve de : «si $g \circ f$ est injective alors f est injective».
   — Preuve de : «si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective».
   — Preuve de : «si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective».
   — Preuve de : «toute suite réelle croissante et majorée converge.»
   — Preuve de : «toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$.»
   — Preuve de : «deux suites réelles adjacentes convergent et ont la même limite.»

Programme de khôlles n°6

Semaine du 4 novembre 2024

Suites numériques réelles
Voir programme 5.

Calcul matriciel.

1. Egalité, addition, multiplication par λ, produit, transposition, puissance k-ième.
2. Matrices carrées inversibles, théorème : si $AB = I$ alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.
3. Détermination pratique de l'inverse : pour les matrices 2×2, pour les matrices diagonales, à l'aide d'un polynôme annulateur à terme constant non nul, par résolution d'un système, par pivot de Gauss sur la matrice et l'identité en parallèle.
4. Caractérisation des matrices triangulaires inversibles.

Note aux khôlleurs : **les coefficients binomiaux et la formule du binôme de Newton ne sont pas encore connus des élèves.**

Questions de cours (10-15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de : «toute suite réelle croissante et majorée converge.»
   — Preuve de : «toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$.»
   — Preuve de : «deux suites réelles adjacentes convergent et ont la même limite.»
   — Preuve de l'unicité de l'inverse + preuve de «si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$».

Programme de khôlles n°7

Semaine du 11 novembre 2024

Dénombrement élémentaire et coefficients binomiaux.

1. Exemples de dénombrements élémentaires avec des listes, listes d'éléments distincts, permutations, combinaisons.
2. Propriétés des coefficients binomiaux, formule du binôme de Newton, nombre de parties d'un ensemble à n éléments.

Calcul matriciel.
Programme 6 + binôme de Newton, identité géométrique ($A^n - B^n = ...$).

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de : tout ensemble à n éléments a 2^n parties.
   — Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
   — Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.
   — Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.
   — Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.
   — Calcul de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^i \sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}3^k\right)$.
   — Preuve de la formule du binôme de Newton pour les matrices.
   — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   — Preuve de l'unicité de l'inverse + preuve de «si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$».

Programme de khôlles n°8

Semaine du 18 novembre 2024

Dénombrement élémentaire et coefficients binomiaux. Voir programme 7.

Probabilités sur un univers fini.

1. Expérience aléatoire, univers (fini), espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, événements et opérations ensemblistes, système complet d'événements.
2. Espace probabilisé fini : probabilité sur un univers fini, propriétés (dont formules donnant $\mathrm{P}(A \cup B)$ et $\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$), caractérisation d'une probabilité sur un univers fini, probabilité uniforme.
3. Probabilités conditionnelles : définition, propriétés, formules des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes.

Note aux khôlleurs : l'indépendance n'est pas encore vue.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de : tout ensemble à n éléments a 2^n parties.
   — Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
   — Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.
   — Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.
   — Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.
   — Calcul de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^i \sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}3^k\right)$.
   — Preuve de la formule du binôme de Newton pour les matrices.
   — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Programme de khôlles n°9

Semaine du 25 novembre 2024

Probabilités sur un <u>univers fini</u>.

1. Expérience aléatoire, univers (fini), espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, événements et opérations ensemblistes, système complet d'événements.
2. Espace probabilisé fini : probabilité sur un univers fini, propriétés (dont formules donnant $\mathrm{P}(A \cup B)$ et $\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$), caractérisation d'une probabilité sur un univers fini, probabilité uniforme.
3. Probabilités conditionnelles : définition, propriétés, formules des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes.
4. Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle de n événements.

Questions de cours (5 minutes maximum) :

Le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **<u>au moins deux</u>** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.

Programme de khôlles n°10

Semaine du 2 décembre 2024

Fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Définition d'une fonction polynomiale, identification des coefficients, degré, degrés de λP, de $P+Q$, de PQ, de $P \circ Q$, de la fonction polynomiale dérivée, intégrité.
2. Division euclidienne.
3. Racines : racines simples, multiples, si P a des racines distinctes $a_1, \ldots, a_r$ de multiplicités respectives $k_1, \ldots, k_r$ alors $(x-a_1)^{k_1} \ldots (x-a_r)^{k_r}$ divise P, une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n ayant au moins $n+1$ racines distinctes est nulle.
4. Factorisation : polynômes irréductibles, cas du trinôme du second degré, pratique de la factorisation de fonctions polynomiales.

Notes aux khôlleurs :

— pour les élèves, polynôme = fonction polynomiale,

— l'ensemble des fonctions polynomiales est noté $\mathbb{R}[x]$,

— la notation $\mathbb{R}[X]$ n'a pas lieu d'être vis à vis du programme (donc pas de X, que des x),

— la dérivée n-ième d'une fonction polynôme sera vue au semestre 2,

— aucun critère donnant la multiplicité des racines grâce à la dérivation n'a été vu (ce sera au semestre 2).

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **<u>au moins deux</u>** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de x^n par $(x-1)^2$, où $n \geqslant 2$.
   — Factoriser $x \longmapsto x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.
   — Factoriser $x \longmapsto x^6 - 3x^2 - 2$.

Programme de khôlles n°11

Semaine du 9 décembre 2024

Fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Voir programme 10.

Fonctions numériques réelles.

1. Généralités sur les fonctions : ordre, parité, périodicité, monotonie, majorant et minorant d'une fonction sur I, maximum et minimum d'une fonction sur I, borne supérieure et inférieure d'une fonction sur I.
2. Limites et continuité en un point : définition de limites d'une fonction en ε, unicité de la limite, continuité en un point, prolongement par continuité, limites et continuité à droite et à gauche, limite de $f(u_n)$, limites et inégalités (passage à la limite dans une relation d'ordre, théorèmes d'existence de limites par comparaison), limites (resp. continuité) et opérations sur les fonctions (multiplication par un scalaire, somme, produit, inverse, quotient, composition), théorème de la limite monotone, croissance comparée (puissance, ln et exp), asymptote oblique.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de x^n par $(x-1)^2$, où $n \geqslant 2$.
   — Factoriser $x \longmapsto x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.
   — Factoriser $x \longmapsto x^6 - 3x^2 - 2$.
   — Preuve de : la fonction $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.
   — Preuve du théorème des gendarmes (cas où $x \to a$ avec $a \in \mathbb{R}$).

Programme de khôlles n°12

Semaine du 16 décembre 2024

Fonctions numériques réelles.

1. Généralités sur les fonctions : ordre, parité, périodicité, monotonie, majorant et minorant d'une fonction sur I, maximum et minimum d'une fonction sur I, borne supérieure et inférieure d'une fonction sur I.
2. Limites et continuité en un point : définition de limites d'une fonction en ε, unicité de la limite, continuité en un point, prolongement par continuité, limites et continuité à droite et à gauche, limite de $f(u_n)$, limites et inégalités (passage à la limite dans une relation d'ordre, théorèmes d'existence de limites par comparaison), limites (resp. continuité) et opérations sur les fonctions (multiplication par un scalaire, somme, produit, inverse, quotient, composition), théorème de la limite monotone, croissance comparée (puissance, ln et exp), asymptote oblique.
3. Continuité sur un intervalle : continuité de λf, $f+g$, fg, f/g, $f \circ g$, $|f|$, théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment par une fonction continue, théorème de la bijection.
4. Exemples d'études de suites définies implicitement.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de : la fonction $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.
   — Preuve du théorème des gendarmes (cas où $x \to a$ avec $a \in \mathbb{R}$).
   — Montrer qu'une fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue a au moins un point fixe.

Programme de khôlles n°13

Semaine du 6 janvier 2025

Fonctions numériques réelles
Voir programme 12.
Essentiellement sur les parties "continuité sur un intervalle" et "suites définies implicitement".

Dérivation

1. Fonction dérivable en un point et sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, dérivable à gauche (à droite) en un point, interprétation graphique, dérivation et opérations sur les fonctions, dérivabilité de la réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.
2. Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle : CN d'extremum local, théorèmes de Rolle et des accroissements finis, inégalité des accroissements finis, théorème du prolongement de la dérivée, caractérisation du sens de variation avec le signe de f'.
3. Utilisation de l'IAF pour l'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Note aux khôlleurs : Tout ce qui est relatif aux dérivées n-ièmes sera vu au deuxième semestre.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Montrer qu'une fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue a au moins un point fixe.
   — Preuve de la CN d'extremum local (pour les élèves, c'est la proposition 2 du poly).
   — Preuve du théorème de Rolle.
   — $\forall x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ à l'aide du théorème des accroissements finis.

Programme de khôlles n°14

Semaine du 13 janvier 2025

Dérivation
Voir programme 13.

Fonction arctangente
Définition, variation, continuité, dérivabilité et formule de la dérivée, imparité, limites.

Variables aléatoires réelles définies $\boxed{\textbf{sur un univers fini}}$

1. Généralités : définition, SCE associé, loi d'une VAR sur un univers fini, loi de $Y = g(X)$.
2. Définitions de : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.

Note aux khôlleurs : ni espérance, ni variance, ce sera pour la semaine prochaine.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de la CN d'extremum local (pour les élèves, c'est la proposition 2 du poly).
   — Preuve du théorème de Rolle.
   — $\forall x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ à l'aide du théorème des accroissements finis.
   — Preuve de : la fonction arctangente est impaire.

Programme de khôlles n°15

Semaine du 20 janvier 2025

Fonction arctangente Voir programme 14.

Variables aléatoires réelles définies $\boxed{\textbf{sur un univers fini}}$

1. Généralités : définition, SCE associé, loi d'une VAR sur un univers fini, loi de $Y = g(X)$.
2. Définitions de : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.
3. Espérance : définition, positivité, cas $\mathrm{E}(X) = 0$ lorsque $X \geqslant 0$, $\mathrm{E}(aX + b)$, linéarité, croissance, théorème de transfert, espérance des lois usuelles (uniforme, Bernoulli et binomiale).
4. Variance et écart-type, cas $\mathrm{V}(X) = 0$, formule de Koenig-Huygens, $\mathrm{V}(aX+b)$ et $\sigma(aX + b)$, variance des lois usuelles (uniforme, Bernoulli et binomiale).

Intégration sur un segment

1. Primitives : définition, propriétés, calcul de primitives.
2. Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue (par l'aire sous la courbe).
3. Théorème fondamental (fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ avec f continue) et lien intégrale/primitives.
4. Propriété de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance, valeur absolue, stricte positivité.
5. Sommes de Riemann (à pas constant).

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de : la fonction arctangente est impaire.
   — Calcul de l'espérance d'une loi uniforme et d'une loi de Bernoulli.
   — Calcul de l'espérance d'une loi binomiale (par le calcul, pas par linéarité de l'espérance).
   — Calcul de la variance d'une loi binomiale.
   — $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Programme de khôlles n°16

Semaine du 27 janvier 2025

Variables aléatoires réelles définies $\boxed{\textbf{sur un univers fini}}$
Voir programme 15.

Intégration sur un segment

1. Primitives : définition, propriétés, calcul de primitives.
2. Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue (par l'aire sous la courbe).
3. Théorème fondamental (fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ avec f continue) et lien intégrale/primitives.
4. Propriété de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance, valeur absolue, stricte positivité.
5. Sommes de Riemann (à pas constant).
6. Méthode d'étude de fonctions de la forme $x \longmapsto \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ avec f continue.
7. Intégration par parties.
8. Changement de variable (selon le programme, tout changement de variable non affine doit être indiqué).

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Calcul de l'espérance d'une loi uniforme et d'une loi de Bernoulli.
   — Calcul de l'espérance d'une loi binomiale (par le calcul, pas par linéarité de l'espérance).
   — Calcul de la variance d'une loi binomiale.
   — $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Programme de khôlles n°17

Semaine du 3 février 2025

Intégration sur un segment

Essentiellement :

1. Méthode d'étude de fonctions de la forme $x \longmapsto \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ avec f continue.
2. Intégration par parties.
3. Changement de variable (selon le programme, tout changement de variable non affine doit être indiqué).

$\mathbb{R}$-espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels : définition, règles de calcul, exemples ($\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$, suites réelles, $\mathbb{R}[x]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$).
2. Sous-espaces vectoriels : définition, intersection de sous-espaces vectoriels, exemples.
3. Familles finies de vecteurs : sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs, propriétés des «$\mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_n)$», familles génératrices (définition et propriétés).

   Note aux khôlleurs : $\boxed{\text{pas encore de familles libres et de bases.}}$

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Calcul de la variance d'une loi binomiale.
   — $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
   — Preuve de : «l'intersection de deux s.e.v. est un s.e.v.».

Programme de khôlles n°18

Semaine du 24 février 2025

$\mathbb{R}$-espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels : définition, règles de calcul, exemples ($\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$, suites réelles, $\mathbb{R}[x]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$).
2. Sous-espaces vectoriels : définition, intersection de sous-espaces vectoriels, exemples.
3. Familles finies de vecteurs : sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs, propriétés des «$\mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_n)$», familles génératrices (définition et propriétés), familles libres et liées (définitions et propriétés), si $(e_1,\dots,e_n)$ est libre alors : $(e_1,\dots,e_n,e)$ est libre ssi $e \notin \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_n)$. Bases.
4. Somme de 2 sous-espaces vectoriels, la concaténation de familles génératrices de F et G est génératrice de $F+G$, somme directe de 2 sous-espaces vectoriels (définition et caractérisation), la concaténation de bases de F et G (avec F et G en somme directe) est une base de $F\oplus G$, sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de : «l'intersection de deux s.e.v. est un s.e.v.».
   — Preuve de : «toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre».
   — Preuve de : «si $(e_1,\dots,e_n)$ est libre alors : $(e_1,\dots,e_n,e)$ est liée ssi $e\in\mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_n)$.»
   — Le sous-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n symétriques et celui des matrices carrées d'ordre n antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Programme de khôlles n°19

Semaine du 3 mars 2025

$\mathbb{R}$-espaces vectoriels
Voir programme 18.

Applications linéaires

1. Définition d'une application linéaire, opérations sur les applications linéaires, binôme de Newton et identité géométrique pour f et g qui commutent, isomorphismes (prop : f^{-1} est linéaire), noyau et image (prop : ce sont des s.e.v. de la source et du but), caractérisation de l'injectivité avec le noyau, image d'une famille finie de vecteurs par une application linéaire, l'image d'une famille génératrice est génératrice de $\operatorname{Im} f$, l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre, caractérisation de l'injectivité (ou surjectivité ou bijectivité) à l'aide de l'image d'une base.

Note aux khôlleurs : pas encore de projecteurs ni de polynômes annulateurs, ce sera pour la semaine de khôlles suivante.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de : «toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre».
   — Preuve de : «si $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre alors : $(e_1, \ldots, e_n, e)$ est liée ssi $e \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$.»
   — Le sous-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n symétriques et celui des matrices carrées d'ordre n antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   — Preuve de «le noyau d'une application linéaire est un s.e.v. de l'e.v. de départ».
   — Preuve de «l'image d'une application linéaire est un s.e.v. de l'e.v. d'arrivée».
   — Preuve de «f injective ssi $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$».

Programme de khôlles n°20

Semaine du 10 mars 2025

Applications linéaires

1. Définition d'une application linéaire, opérations sur les applications linéaires, binôme de Newton et identité géométrique pour f et g qui commutent, isomorphismes (prop : f^{-1} est linéaire), noyau et image (prop : ce sont des s.e.v. de la source et du but), caractérisation de l'injectivité avec le noyau, image d'une famille finie de vecteurs par une application linéaire, l'image d'une famille génératrice est génératrice de $\operatorname{Im} f$, l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre, caractérisation de l'injectivité (ou surjectivité ou bijectivité) à l'aide de l'image d'une base.
2. Polynômes d'endomorphismes et polynômes annulateurs (application à la recherche de f^n et de f^{-1}).
3. Etude des projecteurs.

Comparaison des suites
Suite négligeable devant une autre, suites équivalentes, propriétés.
Note aux khôlleurs : les élèves ne connaissent pas encore les équivalents usuels des fonctions usuelles.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de «le noyau d'une application linéaire est un s.e.v. de l'e.v. de départ».
   — Preuve de «l'image d'une application linéaire est un s.e.v. de l'e.v. d'arrivée».
   — Preuve de «f injective ssi $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$».
   — Preuve de : «si p est un projecteur d'un espace vectoriel E alors $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.»

Programme de khôlles n°21

Semaine du 17 mars 2025

Applications linéaires
Voir programme 20.
Essentiellement les polynômes d'endomorphismes et les projecteurs.

Comparaison des suites et des fonctions

1. Suite négligeable devant une autre, suites équivalentes, propriétés.
2. Fonctions :
   (a) petits o (définition, propriétés, croissance comparée),
   (b) fonctions équivalentes : définition, propriétés, équivalents usuels en 0 ($\sin x$, $\tan x$, $1-\cos x$, $\ln(1+x)$, e^x-1, $(1+x)^\alpha-1$) et leur composition à droite par une fonction u qui tend vers 0 ou par une suite (u_n) qui tend vers 0.

Dérivations successives

1. Algèbre : cas des polynômes.
   Polynômes dérivés successifs, propriétés de la dérivation n-ième (dont formule de Leibniz), formule de Taylor pour les polynômes, critère donnant la multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés successifs.
2. Analyse : cas des fonctions.
   (a) Fonctions dérivées successives, classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$, classe d'une fonction et opérations (dont formule de Leibniz).

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de : «si p est un projecteur d'un espace vectoriel E alors $E = \mathrm{Ker}\,(p) \oplus \mathrm{Im}\,(p)$.»
   — Preuve d'un équivalent usuel parmi $\sin x$, $\tan x$, $1-\cos x$, $\ln(1+x)$, e^x-1, $(1+x)^\alpha-1$.
   — Preuve de la formule de Taylor pour les polynômes.
   — Preuve de la formule de Leibniz pour les fonctions.

Programme de khôlles n°22

Semaine du 24 mars 2025

Comparaison des suites et des fonctions
Voir programme 21. Essentiellement les fonctions.

Dérivations successives

1. Algèbre : cas des polynômes.
   Polynômes dérivés successifs, propriétés de la dérivation n-ième (dont formule de Leibniz), formule de Taylor pour les polynômes, critère donnant la multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés successifs.
2. Analyse : cas des fonctions.
   (a) Fonctions dérivées successives, classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$, classe d'une fonction et opérations (dont formule de Leibniz).
   (b) Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.

Développements limités

1. Définitions de DL en 0, x_0 et $\pm\infty$, DL en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$, DL en 0 d'une fonction (im)paire, troncature, DL à l'ordre 0 et continuité, DL à l'ordre 1 et dérivabilité.
2. Formule de Taylor-Young, DL en 0 des fonctions usuelles ($x \longmapsto \mathrm{e}^x$, $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$, $x \longmapsto \ln(1+x)$), calculs de DL par combinaisons linéaires et produit.
3. Applications : recherches d'équivalents et calculs de limites.

Note aux khôlleurs : pas encore d'étude de tangente et de branches infinies ; la composition et la primitivation des DL sont hors-programme en ECG.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve d'un équivalent usuel parmi $\sin x$, $\tan x$, $1-\cos x$, $\ln(1+x)$, e^x-1, $(1+x)^\alpha-1$.
   — Preuve de la formule de Taylor pour les polynômes.
   — Preuve de la formule de Leibniz pour les fonctions.
   — Preuve de la formule de Taylor avec reste intégral.

Programme de khôlles n°23

Semaine du 31 mars 2025

Dérivations successives Voir programme 22.

Développements limités

1. Définitions de DL en 0, x_0 et $\pm\infty$, DL en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$, DL en 0 d'une fonction (im)paire, troncature, DL à l'ordre 0 et continuité, DL à l'ordre 1 et dérivabilité.
2. Formule de Taylor-Young, DL en 0 des fonctions usuelles ($x \longmapsto \mathrm{e}^x$, $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$, $x \longmapsto \ln(1+x)$), calculs de DL par combinaisons linéaires et produit.
3. Applications : recherches d'équivalents et calculs de limites, étude locale d'une courbe (tangente et position), étude des branches infinies.

Note aux khôlleurs : composition et primitivation des DL hors-programme.

Extrema et convexité

1. Extrema : déf. d'extremum local et global, existence d'extrema globaux pour une fonction continue sur un segment, CN d'existence d'un extremum local pour une fonction C^1 sur un intervalle ouvert, point critique, CS d'existence d'un extremum local en un point critique x_0 pour une fonction C^2 sur un intervalle ouvert (selon que $f''(x_0) > 0$ ou < 0).
2. Fonctions convexes (et concaves) : déf. et interprétation graphique (cordes et arcs), inégalité de convexité généralisée (ou de Jensen), caractérisation des fonctions convexes et concaves parmi les fonctions dérivables, parmi les fonctions deux fois dérivables, point d'inflexion, CS d'extremum global en un point critique d'une fonction convexe (ou concave) sur un intervalle ouvert.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de la formule de Leibniz pour les fonctions.
   — Preuve de la formule de Taylor avec reste intégral.
   — Preuve de la CS d'existence d'un extremum local en un point critique x_0 pour une fonction C^2 sur un intervalle ouvert (si $f''(x_0) > 0$ ou < 0).

Programme de khôlles n°24

Semaine du 21 avril 2025

Extrema et convexité

Voir programme 23.

Séries numériques réelles

1. Définitions d'une série, de la somme et du reste d'ordre N d'une série convergente, séries géométriques et ses dérivées première et seconde (convergence et somme), série exponentielle (convergence et somme), divergence grossière, série téléscopique, opérations sur les séries.
2. Séries à termes positifs : une série à termes positifs converge ssi la suite de ses sommes partielles est majorée, séries de Riemann, comparaison au moyen d'inégalités et d'équivalents.
3. Toute série absolument convergente est convergente.
4. Comparaison au moyen de petits o dans le cas où $u_n = o(v_n)$ avec les v_n positifs.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — un développement limité pour chaque élève.

Programme de khôlles n°25

Semaine du 28 avril 2025

Séries numériques réelles
Voir programme 24.

Espaces probabilisés

1. Expérience aléatoire, univers, ensemble d'événements (POUR LES COLLEURS, LE MOT TRIBU EST HORS-PROGRAMME), espace probabilisable, événements et opérations ensemblistes, système complet d'événements.
2. Espace probabilisé : probabilité, propriétés (dont probabilité de la réunion de 2 ou 3 événements), caractérisation d'une probabilité sur un univers au plus dénombrable, probabilité uniforme dans le cas d'un univers fini, théorème de la limite monotone et son corollaire (voir programme officiel).
3. Probabilités conditionnelles : définition, propriétés, formules des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes.

NOTE AUX KHÔLLEURS : pas encore d'événements mutuellement indépendants.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — un développement limité pour chaque élève.