Devoir maison 12

Pour le lundi 5 mai 2025

Pour tout $(p, N) \in \mathbb{N}^2$, on définit la fonction $f_{p,N}$ sur $]-1, 1[$ par :

$$f_{0,N}(x) = \frac{x^N}{1-x} \text{ et } f_{p+1,N}(x) = \int_0^x f_{p,N}(t)\,\mathrm{d}t$$

1. (a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_p de degré inférieur ou égal à $(p-1)$ tel que pour tout x de $]-1, 1[$:

$$f_{p,0}(x) = -\frac{(x-1)^{p-1}}{(p-1)!}\ln(1-x) + P_p(x)$$

   (b) Montrer que, pour tout p et N de $\mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, 1[$, on a : $|f_{p,N}(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{p+N}}{1-|x|}$.

   (c) Montrer que, pour tout p et N de $\mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, 1[$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{n!x^{n+p}}{(n+p)!} = f_{p,0}(x) - f_{p,N+1}(x)$.

   (d) Pour tout $x \in]-1, 1[$ et tout $p \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!x^{n+p}}{(n+p)!}$ et exprimer sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!x^{n+p}}{(n+p)!}$ en fonction $f_{p,0}(x)$.

2. On dispose d'une urne contenant au départ une boule blanche, on a par ailleurs un stock infini de boules rouges et on joue indéfiniment avec une pièce de monnaie non truquée selon le protocole suivant :
   — si on obtient «face» au n-ième lancer ($n \geqslant 1$), on ajoute u_n boules rouges au contenu de l'urne avant le lancer suivant de la pièce ;
   — la première fois que l'on obtient «pile», on tire au hasard une boule de l'urne et le jeu s'arrête alors.

   On note B l'événement «on tire la boule blanche», A_n l'événement «la pièce donne n fois face avant de faire pile», F_n l'événement «le n-ième lancer donne face» et P_n l'événement «le n-ième lancer donne pile».

   (a) Calculer la probabilité $\mathrm{P}(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Exprimer la probabilité $\mathrm{P}(B)$ à l'aide de la suite $(u_n)_n$.

   (c) Déterminer $\mathrm{P}(B)$ lorsque la suite $(u_n)_n$ est la suite nulle.

   (d) Déterminer $\mathrm{P}(B)$ lorsque la suite $(u_n)_n$ est la suite constante égale à 1.

   (e) Déterminer $\mathrm{P}(B)$ lorsque la suite $(u_n)_n$ est définie par $u_n = n + 1$.