

Devoir surveillé 12 (interrogation écrite)

Vendredi 9 mai 2025

Durée : 1h

Exercice 1. On réalise une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'événement «on obtient pile au n -ième lancer», F_n l'événement «on obtient face au n -ième lancer», et A_n l'événement «on obtient au moins une fois la séquence pile-pile-face au cours des n premiers lancers».

1. Déterminer $P(A_1)$, $P(A_2)$ et $P(A_3)$.
2. Soit $n \geq 1$.
 - (a) Montrer que $A_{n+3} = A_{n+2} \cup (\overline{A_n} \cap P_{n+1} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3})$.
 - (b) En déduire $P(A_{n+3}) = P(A_{n+2}) + \frac{1}{8}(1 - P(A_n))$.
3. Sans chercher à calculer $P(A_n)$, montrer que la suite $(P(A_n))_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.
4. Pour tout $n \geq 3$, on pose $B_n = A_n \cap \overline{A_{n-1}}$.
 - (a) Que signifie l'événement B_n ?
 - (b) Montrer que $\sum_{n=3}^N P(B_n) = P(A_N)$ pour tout $N \geq 3$.
 - (c) En déduire $P\left(\bigcup_{n=3}^{+\infty} B_n\right)$. Interpréter.

Exercice 2. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé. Montrer que la probabilité pour qu'aucun des A_i ne soit réalisé est au plus égale à $\exp\left(-\sum_{i=1}^n P(A_i)\right)$.

Devoir surveillé 12 (interrogation écrite)

Vendredi 9 mai 2025

Durée : 1h

Exercice 1. On réalise une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'événement «on obtient pile au n -ième lancer», F_n l'événement «on obtient face au n -ième lancer», et A_n l'événement «on obtient au moins une fois la séquence pile-pile-face au cours des n premiers lancers».

1. Déterminer $P(A_1)$, $P(A_2)$ et $P(A_3)$.
2. Soit $n \geq 1$.
 - (a) Montrer que $A_{n+3} = A_{n+2} \cup (\overline{A_n} \cap P_{n+1} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3})$.
 - (b) En déduire $P(A_{n+3}) = P(A_{n+2}) + \frac{1}{8}(1 - P(A_n))$.
3. Sans chercher à calculer $P(A_n)$, montrer que la suite $(P(A_n))_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.
4. Pour tout $n \geq 3$, on pose $B_n = A_n \cap \overline{A_{n-1}}$.
 - (a) Que signifie l'événement B_n ?
 - (b) Montrer que $\sum_{n=3}^N P(B_n) = P(A_N)$ pour tout $N \geq 3$.
 - (c) En déduire $P\left(\bigcup_{n=3}^{+\infty} B_n\right)$. Interpréter.

Exercice 2. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé. Montrer que la probabilité pour qu'aucun des A_i ne soit réalisé est au plus égale à $\exp\left(-\sum_{i=1}^n P(A_i)\right)$.