Espaces vectoriels de dimension finie

Divers

Exercice 1. Soient P_1 et P_2 deux plans vectoriels distincts d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3. Montrer que $P_1 \cap P_2$ est une droite vectorielle.

Exercice 2. On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[x]$ de degré inférieur ou égal à n. Soient n un entier naturel non nul et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit le polynôme L_k dans $\mathbb{R}[x]$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - a_j}{a_k - a_j}$$

1. Déterminer le degré de L_k pour $k \in [\![0, n]\!]$.
2. Pour tout $(k, i) \in [\![0, n]\!]^2$, calculer $L_k(a_i)$.
3. Montrer que la famille $(L_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
4. Montrer que, pour tout $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x + k) \end{array}$.

On considère le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}\,(f_1, \ldots, f_n)$ de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que $F \subset \text{Vect}\,(\sin, \cos)$.
   (b) Montrer que la famille (f_1, f_2) est libre.
   (c) En déduire que $F = \text{Vect}\,(\sin, \cos)$.
2. En déduire qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(x + k)$.

Sommes, sommes directes et supplémentaires en dimension finie

Exercice 4.

1. Les sous-espaces vectoriels $F = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\Big\}$ et $G = \text{Vect}\Big((2, 0, -2)\Big)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
2. Trouver un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de $F = \text{Vect}\Big((1, 2, 3)\ ,\ (-1, 2, 0)\Big)$.
3. Trouver un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de $G = \text{Vect}\Big((2, -2, 0)\ ,\ (-1, 3, 1)\ ,\ (1, 1, 1)\Big)$.

Exercice 5. Soient $P : x \longmapsto 1 + x + x^2 + x^3$ et $Q : x \longmapsto 1 + x - x^2 + x^3$. Montrer que : $\mathbb{R}_3[x] = \text{Vect}\,(P, Q) \oplus \mathbb{R}_1[x]$.

Exercice 6. Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que, pour tout $a \in E \setminus H$, on a $E = H \oplus \text{Vect}\,(a)$.

Exercice 7. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) d'ordre $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer $\dim \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\dim \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Applications linéaires en dimension finie : exercices théoriques

Exercice 8. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme non nul de E nilpotent, c'est-à-dire tel qu'il existe un entier k tel que $f^k = 0$. On pose $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0\}$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que $f^k(x_0) \neq 0$ pour tout $k \in [\![0, p - 1]\!]$.
2. Montrer que la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est libre.
3. En déduire que $f^n = 0$.

Exercice 9. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$.
Montrer que $\text{rg}\,(u \circ v) \leqslant \text{rg}\,(u)$ et $\text{rg}\,(u \circ v) \leqslant \text{rg}\,(v)$.

Exercice 10. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

1. Montrer que, si $g \circ f = \tilde{0}$, alors $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leqslant \dim E$.
2. Montrer que, si $f+g$ est bijectif, alors $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \geqslant \dim E$.

Exercice 11. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F.

1. Montrer que $\text{Im}\,(f+g) \subset \text{Im}\,(f) + \text{Im}\,(g)$.
2. En déduire $\text{rg}\,(f+g) \leqslant \text{rg}\,(f) + \text{rg}\,(g)$.

Exercice 12. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Pour tout entier naturel p, on notera $I_p = \text{Im}\, u^p$ et $K_p = \text{Ker}\, u^p$.

1. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.
2. On suppose que E est de dimension finie et u injectif. Déterminer I_p et K_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. On suppose que E est de dimension finie n non nulle et u non injectif.
   (a) Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
   (b) Montrer qu'alors $I_r = I_{r+1}$ et que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_r = K_{r+p}$ et $I_r = I_{r+p}$.
   (c) Montrer que $E = K_r \oplus I_r$.
4. Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $K_r = K_{r+1}$?

Polynômes de matrices carrées

Exercice 13. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
2. Déterminer un polynôme annulateur unitaire de A de degré minimal.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. Retrouver le résultat précédent par une autre méthode.

Applications linéaires en dimension finie : exercices pratiques

Exercice 14. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (2x - y + z, -x + y, x - z)$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. L'endomorphisme f est-il un automorphisme ? Si oui, déterminer f^{-1} ?

Exercice 15. Déterminer, sans calcul, le rang, le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 16. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de f, une base de $\text{Ker}\, f$ et une base de $\text{Im}\, f$.
2. Donner une (ou des) équation(s) de $\text{Im}\, f$.
3. Les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}\, f$ et $\text{Im}\, f$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 17. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -2 & -5 & -2 \\ 6 & 18 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que u est un projecteur et en donner ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 18. On considère l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$.
L'application linéaire f est-elle un isomorphisme ? Si oui, déterminer f^{-1} ? On donnera deux méthodes : la première sans utiliser la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[x]$ et de $\mathbb{R}^3$, la deuxième en l'utilisant.

Exercice 19. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer le rang de f, une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 20. Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[x]$, on pose $\varphi(P) : x \longmapsto 3(x+1)P(x) - (x+1)^2 P'(x) \in \mathbb{R}[x]$.

1. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_3[x],\ \varphi(P) \in \mathbb{R}_3[x]$.
2. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[x] \\ P & \longmapsto & 3(x+1)P(x) - (x+1)^2 P'(x) \end{array}$ est un endomorphisme.
3. Déterminer le rang de φ, une base de $\operatorname{Ker} \varphi$ et une base de $\operatorname{Im} \varphi$.

Exercice 21. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$.

1. Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. On considère l'application $\Gamma : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ définie par $\Gamma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[x]} + D + D^2 + \ldots + D^n$. Montrer que Γ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ et déterminer son application réciproque.

Exercice 22. On définit les fonctions f_0, f_1 et f_2 sur $\mathbb{R}$ par

$$f_0(x) = \mathrm{e}^x \qquad f_1(x) = x\mathrm{e}^x \qquad f_2(x) = x^2\mathrm{e}^x$$

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par f_0, f_1, f_2.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de F.
2. Montrer que l'application $D : f \longmapsto f'$ est un endomorphisme de F.
3. Déterminer la matrice A de D dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire la dérivée n-ième de $\varphi : x \longmapsto (1 + 2x + 3x^2)\mathrm{e}^x$. Retrouver ce résultat par une autre méthode.

Rang d'une matrice

Exercice 23. Déterminer le rang des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 24. Déterminer en fonction des réels a et b le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & 2b \\ 2a & a & 2a \\ 3a & b & b \end{pmatrix}$.

Exercice 25. A quelle(s) condition(s) la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?