Devoir maison 14

Exercice 1.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^2$ et 0 l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Le but de cet exercice est de trouver les couples (u, v) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les 4 assertions suivantes :

(A_1) : $u^2 = -\mathrm{id}$ (il faut comprendre $u \circ u = -\mathrm{id}$)

(A_2) : $v \neq \mathrm{id}$

(A_3) : $(v - \mathrm{id})^2 = 0$

(A_4) : $\mathrm{Ker}\,(u + v - \mathrm{id}) \neq \{0\}$

1. *Etude d'un exemple.*
   Vérifier que les endomorphismes u et v dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement
   $$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   sont solutions du problème posé.

On revient au cas général et on considère un couple (u, v) solution du problème.

2. (a) Montrer que u et v sont des automorphismes de $\mathbb{R}^2$, puis donner u^{-1} et v^{-1} en fonction de u, v et id.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer v^n comme combinaison linéaire de v et id.
3. (a) Etablir que : $\mathrm{Im}\,(v - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}\,(v - \mathrm{id})$.
   (b) En déduire, en raisonnant sur les dimensions, que : $\mathrm{Im}\,(v - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\,(v - \mathrm{id})$.
4. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que : $\dim \mathrm{Ker}\,(u + v - \mathrm{id}) = 1$.
5. Soit (e_2) une base de $\mathrm{Ker}\,(u + v - \mathrm{id})$. On pose : $e_1 = -u(e_2)$.
   (a) Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Donner les matrices de u et v dans cette base.
6. Donner la conclusion de cet exercice.

Exercice 2.

Partie A

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application

$$\Delta : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

c'est-à-dire que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.
On adopte la notation usuelle :

$$\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} \qquad \text{et} \qquad \Delta^i = \underbrace{\Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{i \text{ fois}},\ \text{pour tout } i \in \mathbb{N}^*$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On pose $N_0 = 1$, $N_1 = X$ et : $\forall k \in [\![2, n]\!],\ N_k = \dfrac{1}{k!} X(X-1) \cdots (X-k+1)$ (si $n \geqslant 2$).
   (a) Montrer que $(N_0, N_1, \ldots, N_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Calculer $\Delta(N_k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
   (c) En déduire $\mathrm{Ker}\,(\Delta)$ et $\mathrm{Im}\,(\Delta)$.
3. Montrer que Δ est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que Δ^m est l'endomorphisme nul.
4. (a) Calculer $\Delta^i(N_j)$ pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]$.
   (b) En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a
   $$P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0).N_k$$

   (c) Dans le cas particulier où $n = 5$, déterminer les coordonnées de X^4 dans la base $(N_0, \dots, N_5)$.

5. (a) Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$Q(X) = P(X+1) - P(X) \quad \text{et} \quad P(0) = 0$$

   (b) Déterminer ce polynôme P à l'aide des coordonnées de Q dans la base $(N_0, \dots, N_n)$.

   (c) Expliciter P lorsque $n = 5$ et $Q = X^4$.

   (d) En déduire, pour tout entier naturel p, une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k^4$.

Partie B

On considère maintenant l'endomorphisme

$$\delta : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(\delta)$ et $\mathrm{Im}\,(\delta)$.
2. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(\delta)$.
   (b) On note δ_F la restriction de δ à F. Montrer que $\delta_F : F \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ est un isomorphisme.
3. L'endomorphisme δ est-il nilpotent ?
4. (a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)$$

   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k)$ pour P de degré strictement inférieur à n.