Devoir surveillé 13

Mercredi 28 mai 2025

Durée : 4h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : *les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.* Le sujet comporte 3 page(s).

Exercice 1.

On considère un entier naturel $n \geqslant 1$ et $n+1$ réels distincts $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

1. Montrer que, pour tout entier k de $[\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$, noté L_k, tel que :

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ L_k(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$$

Montrer que ce polynôme est donné par : $\forall x \in \mathbb{R},\ L_k(x) = \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - a_j}{a_k - a_j}$

2. (a) Montrer que $(L_0, L_1 \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

   (b) Donner les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[x]$ dans cette base.

   (c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k(x) = 1$.

3. On suppose maintenant que les réels a_j sont définis par $a_j = j$ pour tout $j \in [\![0, n]\!]$.

   (a) Montrer que, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ L_k(x) = \dfrac{(-1)^{n-k}}{n!}\dbinom{n}{k}\displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x - j)$

   (b) Déterminer le polynôme Q défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kL_k(x)$.

   (c) Soit A la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ à la base $(L_0, L_1 \ldots, L_n)$.
   On ne demande pas d'écrire la matrice A, mais de donner :
   — la première ligne de la matrice A,
   — la somme des éléments de toute autre ligne de A,
   — et la somme des éléments des différentes colonnes de A.

   (d) Justifier que A est inversible et donner la matrice A^{-1}.

Exercice 2.

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

Partie 1 – Variables vérifiant une relation de Panjer
On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathrm{P}(N=0) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(N=k) = \left(a + \frac{b}{k}\right)\mathrm{P}(N=k-1)$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(N=k) = \dfrac{b^k}{k!}\mathrm{P}(N=0)$
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=k)$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
   Préciser son espérance et sa variance.
2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.
   (a) Montrer que : $\forall k \geqslant 2,\ \mathrm{P}(N=k) = 0$
   (b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.
3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{P}(Z=k) = \dfrac{p}{1-p} \times \dfrac{n-k+1}{k} \times \mathrm{P}(Z=k-1)$
   (b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p.
4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.
   (a) Calculer $\mathrm{P}(N=1)$. En déduire que $a + b \geqslant 0$.
   (b) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\mathrm{P}(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\mathrm{P}(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{P}(N=k)$
   (c) En déduire que $\displaystyle\left((1-a)\sum_{k=1}^{m} k\mathrm{P}(N=k)\right)_{m \geqslant 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.
   Préciser alors la valeur de $\mathrm{E}(N)$ en fonction de a et b.
   (d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et que : $\mathrm{E}\left(N^2\right) = \dfrac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$
   (e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathrm{V}(N)$ en fonction de a et b.
   (f) Montrer que $\mathrm{E}(N) = \mathrm{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Partie 2 – Fonction génératrice
On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = \mathrm{P}(N=k)$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} p_k x^k$ est convergente.

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=k)x^k$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\dfrac{b}{a} > 0$. On pose : $\alpha = \dfrac{-(a+b)}{a}$.
On note enfin f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = p_0(1-ax)^{\alpha}$$

6. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\forall x \in [0,1]$, $f^{(k)}(x) = k! \times p_k(1-ax)^{\alpha-k}$
7. Soit $x \in [0,1]$.
   (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \,\mathrm{d}t$
   (b) Vérifier que pour tout $t \in [0,x]$, $\dfrac{x-t}{1-at} \leqslant 1$.
   Puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$
   (c) En déduire que : $G(x) = p_0(1-ax)^{\alpha}$
   En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier que $G'(1) = \mathrm{E}(N)$.

Partie 3 – Informatique

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question 4 de la partie 1.
On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geqslant 1 \end{cases}$$

autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = 0 \text{ si } N(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \text{ sinon}$$

8. Calculer $\mathrm{P}(S=0)$ lorsque $a \in]0,1[$ à l'aide de la partie 2.
9. (a) Calculer $\mathrm{P}(S=0)$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   (b) On considère la fonction Python suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```
import numpy.random as rd

def simulX(n):
    y=0
    for i in range(n):
        if rd.random()<0.5:
            y=y+1
    return y
```

   Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser son (ou ses) paramètre(s).
   (c) On rappelle qu'en Python l'instruction `rd.poisson(lam)` renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `lam`, après avoir importé le module `numpy.random` grâce à l'instruction `import numpy.random as rd`.
   On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ, et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.
   Recopier et compléter la fonction Python suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```
def simulS(lam,n):
    N=rd.poisson(lamb)
    ..........
    ..........
    ..........
    ..........
    return S
```