Intégrales impropres

Nature d'une intégrale impropre

Exercice 1. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\ln x}$.

Exercice 2. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 4. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+2\cos^2 x}{x-1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{|x(x-1)|}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ converge et calculer cette intégrale.

Exercice 8.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ converge.
2. Calculer cette intégrale.

Exercice 9.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Calculer cette intégrale à l'aide du changement de variable $u=\sqrt{1-x}$.

Nature d'une intégrale impropre avec paramètre

Exercice 10. *Intégrales de Bertrand.*
Pour $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, on étudie la nature de l'intégrale

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$$

1. On suppose $\alpha>1$. Montrer que l'intégrale étudiée converge.
2. On suppose $\alpha=1$. Calculer $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$, puis en déduire pour quels $\beta\in\mathbb{R}$ l'intégrale étudiée converge.
3. On suppose $\alpha<1$. En exploitant $\displaystyle\frac{t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, établir que l'intégrale étudiée diverge.

Exercice 11. Soit $\alpha>0$. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)\mathrm{d}x$.

Divers

Exercice 12. *La fonction Gamma.*
Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

lorsque cette intégrale converge.

1. Déterminer l'ensemble de définition de Γ.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, pour tout $x > 0$.
3. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer I_n en fonction de n.

Exercice 14.

1. (a) Montrer que $\ln(\sin x) \underset{0}{\sim} \ln x$.

   (b) En déduire la nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$.
2. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$.
3. Montrer que $2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln 2$.
4. En déduire $2I = I - \dfrac{\pi}{2}\ln 2$ puis la valeur de I.

Exercice 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$ et $w_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$.

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(n+1)$.

   (c) Donner la limite de la suite (u_n).
3. On se propose de déterminer un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

   (a) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente.

   (b) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \leqslant I$.

   (c) En déduire un encadrement de v_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (d) Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de u_n.

Exercice 16. Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$.

1. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

2. (a) Etablir, pour tout (ε, X) appartenant à $]0,+\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leqslant X$:

$$\int_{\varepsilon}^{X} \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \int_{\varepsilon}^{X} \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

(A cet effet, on pourra utiliser des changements de variable.)

(b) En déduire, pour tout (ε, X) appartenant à $]0,+\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leqslant X$:

$$\int_{\varepsilon}^{X} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

3. (a) Montrer que l'application $h : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto h(y) = \begin{cases} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-y}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

(b) En déduire : $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \ln \frac{b}{a}$.

(c) Etablir, pour tout X de $]0,+\infty[$: $\displaystyle\int_{0}^{X} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$.

(d) En déduire : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln \frac{b}{a}$.