Devoir surveillé 1

Vendredi 26 septembre 2025

Durée : 2h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être $\boxed{\textbf{encadrés}}$. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : ***les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.***

Le sujet comporte 2 page(s).

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x - 1 \leqslant \sqrt{|x+1|}$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor e^x \rfloor = n$ d'inconnue x.

Exercice 3. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ x & + & my & + & z & = & m \\ mx & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 4. On considère un réel $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \cos(x) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$

On pose également : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k$

1. (a) Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \dfrac{1+\cos(\theta)}{2} = \cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right) P_n = \dfrac{\sin(x)}{2^n}$.
4. En déduire P_n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
5. En prenant le logarithme népérien de la relation trouvée à la question précédente, puis en dérivant par rapport à x, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)}{2^k} = \frac{1}{2^n \tan\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Exercice 5. *Les deux premières questions sont indépendantes.*
Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des réels.

1. (a) Montrer : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

   (b) On pose $A = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ et $B = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$. Montrer que si les $x_1, \ldots, x_n$ sont non tous nuls et les $y_1, \ldots, y_n$ sont non tous nuls alors : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i y_i \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}x_i^2 + \frac{A}{B}y_i^2\right)$.

   (c) En déduire
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

2. (a) Montrer que si les $y_1, \ldots, y_n$ sont non tous nuls alors la fonction $t \longmapsto \sum_{i=1}^{n}(x_i+ty_i)^2$ est une fonction polynômiale de degré 2 dont on déterminera les coefficients.

   (b) Montrer alors
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \qquad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz, version 1)}$$
   et
$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \qquad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz, version 2)}$$

3. *Trois applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

   (a) Montrer
$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

   (b) Montrer
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}$$

   (c) Montrer
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \qquad \text{(inégalité de Minkowski)}$$