

Raisonnements

Exercice 1. Soient I un intervalle de \mathbb{R} non vide et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I . Exprimer les négations des assertions suivantes :

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$
4. $\forall x \in I, \forall y \in I, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
5. $\forall x \in I, \forall y \in I, f(x) = f(y) \implies x = y$
6. $\forall x \in I, f(x) > 0 \implies x \leq 0$

Exercice 2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- (a) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq y$
- (b) $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, x \geq y$

Exercice 3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- (a) $\forall n \in \mathbb{N}, n > 2 \implies n \geq 3$
- (b) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \implies x \geq 3$
- (c) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, x \leq y \implies \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$

Exercice 4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer : $x \notin \mathbb{Q} \implies x + 1 \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n$.

Exercice 6. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Conjecturer une formule donnant u_n en fonction de n pour tout entier naturel n , puis la prouver.

Exercice 8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.