

# Calcul

## SOMMES ET PRODUITS

**Exercice 1.** Calculer  $\sum_{k=0}^n e^k$  et  $\prod_{k=0}^n e^k$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 2.** Calculer  $\prod_{k=1}^n \frac{k}{k+2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 3.** Calculer  $\sum_{k=2}^n 5^k$  pour tout  $n \geq 2$ .

**Exercice 4.** Calculer  $\sum_{i=0}^n \frac{2^i}{3^{2^i-1}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 5.** Calculer  $\sum_{k=0}^n \left( (n-k)^3 + (k-1)^2 \right)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 6.** Calculer  $\sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 7.** Calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 8.** Montrer par deux méthodes (avec et sans récurrence) que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$ .

**Exercice 9.**

1. Développer  $(k+1)^3 - k^3$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

2. En sommant pour  $k$  allant de 0 à  $n$ , en déduire  $\sum_{k=0}^n k^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 10.**

1. Développer  $(k+1)^4 - k^4$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

2. En sommant pour  $k$  allant de 0 à  $n$ , en déduire  $\sum_{k=0}^n k^3$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 11.** Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

1. Déterminer des réels  $a, b$  et  $c$  tels que :  $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1} + \frac{c}{k+1}$ .

2. Calculer  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k^2-1)}$ .

3. Retrouver le résultat précédent par récurrence.

**Exercice 12.** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , on a :  $\prod_{p=0}^{n-1} (1 + x^{3^p} + x^{2 \cdot 3^p}) = \frac{x^{3^n} - 1}{x - 1}$ .

**Exercice 13.** Soient  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $\sum_{k=1}^n kx^k$ . (Indication : dériver  $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$ .)

**Exercice 14.** Calculer  $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(Indication : on pourra écrire  $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} (-1)^k k^2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} (-1)^k k^2 = \dots$ )

**Exercice 15.** Calculer  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$  et  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 16.** Calculer  $\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=j}^n \frac{j^3}{(i+1)^2} \right)$ .

**Exercice 17.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Calculer  $\sum_{i=0}^n \left( \sum_{k=i}^n 2^k \right)$ .
- En déduire  $\sum_{k=0}^n (k+1)2^k$ .

**Exercice 18.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$ .

### FONCTIONS USUELLES

**Exercice 19.** Etudier rapidement  $f : x \mapsto x2^x$ .

**Exercice 20.** Dire pour quels réels  $x$  la quantité  $x \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$  est définie, puis la simplifier.

**Exercice 21.** Etudier rapidement  $f : x \mapsto x^x$ .

**Exercice 22.** Etudier rapidement  $f : x \mapsto x^{\ln x}$ .

**Exercice 23.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $e^x + e^{1-x} = e + 1$ .

**Exercice 24.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$ .

**Exercice 25.** Résoudre l'équation  $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ .

**Exercice 26.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2^{2x} - 5^x - 4^{x-1} + 25^{\frac{x}{2}-1} = 0$ .

**Exercice 27.** Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système  $\begin{cases} e^x e^{2y-1} = 1 \\ 2xy = -1 \end{cases}$ .

**Exercice 28.** Résoudre le système  $\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln \sqrt{3} - 2 \ln 2 \\ 2(x + y) = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$ .

**Exercice 29.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sin(x) = \frac{1}{2}$ .

**Exercice 30.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sin(3x) = 1$ .

**Exercice 31.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos x = \sin 3x$ .

**Exercice 32.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sin(x) + \sin(2x) = 0$ .

**Exercice 33.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2 \cos^2 x + \sin x = 1$ .

**Exercice 34.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

*Indication : on pourra remarquer que  $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right)$  pour tout  $x$  réel.*

DIVERS, ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

**Exercice 35.** Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \left( (\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \implies x = 0 \right)$ .

**Exercice 36.** Calculer  $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ .

**Exercice 37.** Montrer que :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \max(a, b) = \frac{a + b + |b - a|}{2} \\ \min(a, b) = \frac{a + b - |b - a|}{2} \end{cases}$

**Exercice 38.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\frac{x}{x+1} \leq \frac{x+1}{x-1}$ .

**Exercice 39.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sqrt{x^2 + 1} = x\sqrt{2}$ .

**Exercice 40.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $x + 1 \leq \sqrt{x + 2}$ .

INÉGALITÉS

**Exercice 41.** Montrer que :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ .

**Exercice 42.** Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k3^k} \leq \frac{1}{2}$ .

**Exercice 43.** Dans cet exercice, on majore la même quantité de deux façons différentes.

1. (a) Montrer que :  $\forall a \in \mathbb{R}, a(1 - a) \leq \frac{1}{4}$ .

(b) En déduire que :  $\forall a \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a^k(1 - a)^k \leq \frac{4}{3}$ .

2. Montrer que :  $\forall a \in ]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a^k(1 - a)^k \leq \frac{1}{1 - a}$ .

## VALEUR ABSOLUE

**Exercice 44.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations

$$\text{a) } |x - 1| \leq -3 \qquad \text{b) } |x - 1| \leq 3$$

$$\text{c) } |x - 1| \leq 0 \qquad \text{d) } |x - 1| \geq -2 \qquad \text{e) } |x - 1| \geq 2$$

**Exercice 45.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $|x| + |x + 1| + |x - 2| = 5$ .

**Exercice 46.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sqrt{|x^2 - 1|} = x - 5$ .

**Exercice 47.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\frac{1}{2} \ln |x - 1| - \ln |x + 1| = 0$ .

**Exercice 48.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\sqrt{|x - 3|} \leq x - 1$ .

**Exercice 49.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\sqrt{|x^2 - 4|} \leq |x - 1|$ .

## PARTIE ENTIÈRE

**Exercice 50.** Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $[\ln(\sqrt{x})] = n$ .

**Exercice 51.** Calculer  $[x + p]$  pour tout réel  $x$  et tout entier  $p$ .

**Exercice 52.** Montrer que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$ .

## DÉTERMINATIONS PRATIQUES DE sup, inf, max, min

**Exercice 53.** Soit  $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ . Déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure et la borne inférieure de  $A$ .