Ensembles et applications

Ensembles

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, on donne un ensemble E et des parties A, B de E : déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$.

1. $E = \mathbb{R}$, $A = [0, 2]$ et $B =]-\infty, 1[$.
2. $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3, 4\}$ et $B = \{3, 5\}$.
3. $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Z}$ et $B = [0, 12]$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = [\![1, n]\!]$. Déterminer $\bigcap\limits_{1 \leqslant n \leqslant 5} A_n$, $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$, $\bigcup\limits_{1 \leqslant n \leqslant 5} A_n$, $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

Exercice 3. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $A \cup B = B \iff A \subset B$
2. $A \cap B = B \iff B \subset A$
3. $A \cup B = A \cap B \iff A = B$

Exercice 4. Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.
Montrer que $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

Exercice 5. Différence symétrique.
Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E, on pose $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Montrer que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Exercice 6. Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que : $A \cap B \subset \Big((A \cap C) \cup (B \cap \overline{C})\Big)$

Exercice 7. Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que :

$$\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{cases} \iff B = C$$

Applications : exercices pratiques

Exercice 8. Soient $f : \begin{array}{ccc}]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$. Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 9. On définit les applications f et g par

$$\forall x \in [0, 1],\ f(x) = \frac{x}{2 - x} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [0, 1],\ g(x) = \frac{2x}{1 + x}.$$

1. Montrer que : $\forall x \in [0, 1],\ 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ et $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$.
2. Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$. Qu'en conclure ?

Exercice 10. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \qquad i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Exercice 11. On dit qu'un entier $n \in \mathbb{N}$ est un carré parfait lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = k^2$.
On considère l'application $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } n \text{ est un carré parfait} \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$
L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 12. L'application $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 13. Montrer que l'application $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x+y) \end{array}$ est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 14. On considère les applications $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}$ et $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$.
Les applications $f,\ g,\ g \circ f,\ f \circ g$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 15. On considère les applications $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x^2) \end{array}$ et $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \ln(1+x^2) \end{array}$.
Les applications f et g sont-elles bijectives ? Si oui, déterminer la réciproque.

Exercice 16. On considère l'application $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-3} \end{array}$.
Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 17. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} x + \mathrm{e}^x = y + \mathrm{e}^y \\ x^2 + xy + y^2 = 27 \end{cases}$. *(Indication : considérer $f : t \longmapsto t + \mathrm{e}^t$)*

Applications : exercices théoriques

Exercice 18. Soient E, F, G trois ensembles, et $f : E \longrightarrow F$, $g_1 : F \longrightarrow G$, $g_2 : F \longrightarrow G$ trois applications.
On suppose que f est surjective et que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Montrer que $g_1 = g_2$.

Exercice 19. Soient E, F, G trois ensembles, et $f_1 : E \longrightarrow F$, $f_2 : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ trois applications.
On suppose que g est injective et que $g \circ f_1 = g \circ f_2$. Montrer que $f_1 = f_2$.

Exercice 20. Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \longmapsto F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 21. Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que, si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
2. Montrer que, si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.

Exercice 22. Soient E un ensemble et $f \in E^E$ telle que $f \circ f = f$. Montrer que si f est injective ou surjective alors $f = \mathrm{id}_E$.

Exercice 23. Soient E un ensemble et $f \in E^E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.