Devoir maison 1

Pour le vendredi 17 octobre 2025

Exercice 1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par leurs premiers termes u_0, v_0 vérifiant $0 < u_0 < v_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n existent et sont strictement positifs.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n = v_0 - u_0$.
3. Première méthode. On traitera cette question *indépendamment* de la question 4.
   (a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.
4. Deuxième méthode. On traitera cette question *indépendamment* de la question 3.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} u_n$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 2. (NE PAS RENDRE) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 strictement positifs et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
2. Montrer qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_p > 1$. On pourra raisonner par l'absurde.
3. En déduire que, pour cet entier $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall n \geqslant p,\ u_n > 1$.
4. En déduire la seule limite finie possible pour la suite $(u_n)_n$.

Dans toute la suite, l'entier $p \in \mathbb{N}^*$ est fixé tel que : $\forall n \geqslant p,\ u_n > 1$.

5. On pose pour tout entier naturel n, $w_n = \dfrac{\sqrt{u_n}}{2} - 1$, et on considère la suite $(x_n)_{n\geqslant p}$ définie par :
$$x_p = |w_p|,\ x_{p+1} = |w_{p+1}|, \text{ et pour tout } n \geqslant p : x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{3}$$
   Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant p}$ converge vers 0.
6. Montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant p,\ x_n \geqslant |w_n|$.
7. En déduire que la suite $(w_n)_n$ est convergente et que la suite $(u_n)_n$ est convergente.