

Devoir maison 2

Pour le lundi 3 novembre 2025

Dans cet exercice, x désigne un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$.

1. Soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = \cos x$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

(a) Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est géométrique.

(b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de x et n .

2. On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{1}{\cos(x)}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$$

(a) Vérifier que $b_1 = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos(x)}$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n : $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

3. (a) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n - a_n = \frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{a_n})}(b_{n-1} - a_{n-1})$.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n < b_n$.

(c) En déduire les variations des suites (a_n) et (b_n) .

(d) En utilisant le résultat obtenu à la question 3a, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{\cos(x)} - 1 \right)$$

(e) Montrer finalement que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et ont même limite ℓ .

4. (a) Vérifier que, pour tout entier naturel n , on a : $a_n = \frac{u_n \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\cos^2(x)}$ et $b_n = \frac{u_n}{\cos^2(x)}$.

(b) En déduire la valeur de ℓ (on pourra utiliser le fait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).