

Devoir surveillé 2 (interrogation écrite)

Jeudi 9 octobre 2025

Durée : 1h

Exercice 1. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{3^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1. Déterminer le signe de $\frac{1+y}{1-y}$ pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer, selon les valeurs de y , le nombre d'antécédents de y par f .
3. L'application f est-elle injective? Surjective?

Exercice 3. On considère la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 4$ (\star) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer une suite (v_n) vérifiant la relation de récurrence (\star) et dont le terme général est de la forme $an + b$ avec a, b réels.
2. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est récurrente linéaire d'ordre 2.
3. En déduire u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Devoir surveillé 2 (interrogation écrite)

Jeudi 9 octobre 2025

Durée : 1h

Exercice 1. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{3^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1. Déterminer le signe de $\frac{1+y}{1-y}$ pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer, selon les valeurs de y , le nombre d'antécédents de y par f .
3. L'application f est-elle injective? Surjective?

Exercice 3. On considère la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 4$ (\star) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer une suite (v_n) vérifiant la relation de récurrence (\star) et dont le terme général est de la forme $an + b$ avec a, b réels.
2. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est récurrente linéaire d'ordre 2.
3. En déduire u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.