

# Dénombrement élémentaire et coefficients binomiaux

## CALCULS AVEC DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

**Exercice 1.** Calculer  $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$  pour tout entier naturel  $n$ .

**Exercice 2.** Calculer  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 3.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ ,  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ ,  $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$ ,  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ ,  $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$

**Exercice 4.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $S = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k}$  et  $T = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}$ .

Calculer  $S + T$ ,  $S - T$  puis en déduire  $S$  et  $T$ .

**Exercice 5.** Calculer  $\sum_{i=1}^n \left( \left( -\frac{2}{3} \right)^i \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} 3^k \right)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 6.**

1. Montrer que, pour tout  $(n, k, i) \in \mathbb{N}^3$  tel que  $k \leq i \leq n$ , on a  $\binom{n}{i} \binom{i}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-i}$ .
2. Calculer  $\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (deux méthodes).

## DÉNOMBREMENT ÉLÉMENTAIRE

**Exercice 7.** On tire simultanément 8 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y-a-t-il de tirages contenant 4 as ?
3. Combien y-a-t-il de tirages contenant 4 as et 4 coeurs ?

**Exercice 8.** De combien de façons peut-on former un nombre pair à 10 chiffres ne contenant aucun 0 ?

**Exercice 9.** De combien de façons peut-on écrire un mot (ayant ou non un sens) de 5 lettres toutes différentes ?

**Exercice 10.** Combien peut-on former de suites strictement croissantes de  $k$  nombres de l'intervalle d'entiers  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ?

## DÉMONSTRATIONS COMBINATOIRES DE FORMULES

**Exercice 11.** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers vérifiant  $1 \leq p \leq n$ .

Un club dispose de  $n$  licenciés. Le coach doit constituer une équipe de  $p$  joueurs et en désigner le capitaine. Dénombrer de deux façons les possibilités qu'il a de faire cela et en déduire une formule.

**Exercice 12.** Soit  $(n, k, i) \in \mathbb{N}^3$  tel que  $k \leq i \leq n$ .

Un club dispose de  $n$  licenciés. Le coach doit constituer une équipe de  $i$  joueurs, dont  $k$  titulaires. Dénombrer de deux façons les possibilités qu'il a de faire cela et en déduire une formule.