

Suites numériques réelles

DÉTERMINATION DE u_n EN FONCTION DE n

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)u_n + 2^n(n+1)!$.

1. On pose $v_n = \frac{u_n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, u_n existe et $u_n < 0$.
2. On pose $v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer que v_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
3. Déterminer u_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Déterminer le terme général des suites suivantes :

1. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. On considère la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 4$ (\star) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer une suite (v_n) vérifiant la relation de récurrence (\star) et dont le terme général est de la forme $an + b$ avec a, b réels.
2. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est récurrente linéaire d'ordre 2.
3. En déduire u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + 10v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 7v_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (u_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
2. Déterminer u_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire v_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^5 = u_{n+2}u_n^4$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. On pose $v_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

LIMITES DE SUITES

Exercice 7. Etudier la limite de chacune des suites définies par

1. $u_n = \frac{(-1)^{n^2}}{n}, n \in \mathbb{N}^*$

2. $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}, n \in \mathbb{N}^*$

3. $u_n = n^3 \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{(\ln n)^2}{n^3} + 2, n \in \mathbb{N}^*$

4. $u_n = \frac{n+1}{n^2+n+1}, n \in \mathbb{N}$

5. $u_n = \frac{n^3+1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$

6. $u_n = \frac{n^7+2n^3-n}{3n^7+\frac{2}{n}}, n \in \mathbb{N}^*$

7. $u_n = \frac{n^7+2n^3-n}{3n^7+\cos n+\frac{2}{n}}, n \in \mathbb{N}^*$

8. $u_n = n - \sqrt{n^2-1}, n \in \mathbb{N}^*$

9. $u_n = n - \sqrt{n^2+(-1)^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$

10. $u_n = \frac{2n^2-n+(-1)^n}{n^2+(-1)^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$

11. $u_n = \frac{2+n(-1)^n}{3+2n}$

12. $u_n = \frac{n^n}{n!}, n \in \mathbb{N}^*$

13. $u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}, n \in \mathbb{N} ((a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2)$

14. $u_n = \left(3 \sin \frac{1}{n^2} + \frac{1}{5} \cos n\right)^n, n \in \mathbb{N}$

(Indication : encadrer $3 \sin \frac{1}{n^2} + \frac{1}{5} \cos n$ à partir d'un certain rang.)

Exercice 8. Montrer par comparaison que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k}$ est convergente.

Exercice 9.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

(a) Supposons qu'il existe un réel $k \in]0, 1[$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ à partir d'un certain rang.

Montrer que : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, 0 < u_n \leq \frac{u_N}{k^N} k^n$.

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(b) Supposons qu'il existe un réel $k > 1$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq k$ à partir d'un certain rang.

Montrer que : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq \frac{u_N}{k^N} k^n$.

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. Application. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

NATURE DE SUITES

Exercice 10. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes vers respectivement ℓ et ℓ' . Montrer que les suites $(\max(u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\min(u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\max(\ell, \ell')$ et $\min(\ell, \ell')$.

Exercice 11. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$ pour tout entier naturel n .

1. Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n .

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+2k-1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 13. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que ces suites convergent.

Exercice 14. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2} \end{cases}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
2. Etudier la monotonie de (u_n) .
3. La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 15. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + u_n \end{cases}$.

1. Etudier la monotonie de (u_n) .
2. La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 16. Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et deux suites réelles définies par

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

1. Montrer que, pour tout n entier naturel, a_n et b_n existent et sont strictement positifs.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \geq a_n$.
3. (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
(b) Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
(c) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

Exercice 17. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n$$

1. Etudier la monotonie des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite.