

Calcul matriciel

PETITS CALCULS

Exercice 1. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Simplifier :

1. $S = (2A)(3B) - (A + 2B)^2 + (A - B)(A + B)$
2. $T = (A + B)(2A^2 - 2B) - 2A^2(A + B) + (-A + B)^2$

Exercice 2. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer lorsque c'est possible les produits AB , BA , AC , CA , BC , CB .

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B carrées d'ordre 3 telles que $AB = 0$.

PUISSANCE D'UNE MATRICE

Exercice 4. Soient $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, où a est un réel, et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer U^2 , U^3 puis U^n pour tout entier naturel n .
2. En déduire A^n pour tout entier naturel n .

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier naturel n .

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On se propose de calculer A^n ($n \in \mathbb{N}$) par plusieurs méthodes.

1. *1ère méthode.*

On pose $B = A - 2I_3$.

- (a) Calculer B^n en fonction de B , pour tout entier naturel n .
- (b) En déduire A^n pour tout entier naturel n .

2. *2ème méthode.*

(a) Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$.

- (b) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $A^n = a_n A + b_n I_3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner les relations de récurrence vérifiées par $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis déterminer a_n et b_n en fonction de n . Déduire A^n .

3. *3ème méthode.*

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que P est inversible et donner son inverse.
- (b) Calculer $D = P^{-1}AP$, puis D^n , puis A^n .

Exercice 7. On considère les matrices A et P suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

On se propose de calculer A^n pour tout entier naturel n , en s'aidant de la matrice P .

1. Prouver que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1} . On précisera la valeur de $18P^{-1}$.
2. On pose $B = P^{-1}AP$. Calculer B .
3. Montrer que B peut se mettre sous la forme $D + J$, où la matrice D est une matrice diagonale et la matrice J vérifie $J^2 = 0$.
4. En déduire l'expression de B^n en fonction de n , D^n , D^{n-1} et J .
5. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $A^n = PB^nP^{-1}$.
6. En déduire une expression de la matrice A^n sous la forme $A^n = \frac{1}{18}C_n$ où l'on précisera en fonction de n les coefficients de C_n .

INVERSIBILITÉ D'UNE MATRICE

Exercice 8. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles? Si oui, déterminer l'inverse.

Exercice 9. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I$.
2. La matrice A est-elle inversible? Si oui, calculer A^{-1} .

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer des réels λ et μ tels que $A^2 = \lambda I_4 + \mu A$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Exercice 11. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible? Si oui, calculer A^{-1} .

Exercice 12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

On suppose que $A + B$ est inversible, que $ABA = A^2B$ et que $BAB = B^2A$. Montrer que $AB = BA$.

ÉTUDE DE SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 13. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 6v_n \end{cases}$.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice A telle que, pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 6v_n \end{cases} \iff X_{n+1} = AX_n$$

2. Justifier que P est inversible.
On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D .
3. En déduire A^n puis les termes u_n et v_n pour tout entier naturel n .